



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

Facultad de Matemáticas

Doctorado en Matemáticas

**Descomposición de Fischer y
Problemas de Frontera para
Ecuaciones de Dirac de Segundo
Orden**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

M.C. Daniel Alfonso Santiesteban

DIRECTORES:

Dr. Ricardo Abreu Blaya

Dr. Yudier Peña Pérez

2022-2026

Parece que uno de los rasgos fundamentales de la naturaleza es que las leyes físicas fundamentales se describen en términos de una teoría matemática de gran belleza y poder, para comprenderla se necesita una norma muy elevada de matemáticas... Uno quizás pudiera describir la situación diciendo que Dios es un matemático de orden muy elevado, y que Él usó matemática muy avanzada al construir el universo.

Paul Dirac

A mis padres

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a Dios por recordarme con frecuencia la obligación de estudiar, por hacerme responsable, por santificar mi trabajo de estudiante, por ayudarme a preparar bien mi misión en la vida, por estar siempre cuando lo necesité, por enseñarme a estudiar con método, a leer con reflexión, a consultar a los que saben más para, el día de mañana, ser útil a mi familia y amistades. Quisiera agradecer a muchas personas y espero que me disculpen aquellas que no mencionase a continuación:

- A mi padre que me acompañó en vida en este camino y que aún lo hace desde el Cielo, y a mi madre por estar a mi lado.
- A mi familia que se enorgullece por mis éxitos, a los que están y a los que ya partieron.
- A mis asesores, Dr. Ricardo Abreu Blaya y Dr. Yudier Peña Pérez, por la incondicionalidad, profesionalidad y amistad.
- Al Dr. José María Sigarreta Almira por su hospitalidad, ayuda y guía, y al Dr. Juan Bory Reyes por sus recomendaciones e instrucciones.
- A Pancho, Fernando y Yohanka que siempre confiaron en mí.
- A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por una beca nacional (CVU: 1043969), al coordinador del posgrado Dr. Francisco Julián Ariza Hernández y a la secretaria Isabel por el apoyo en los distintos oficios administrativos.
- A mis profesores y amigos, con los que he vivido momentos inolvidables e invaluable. A todos los que de un modo u otro contribuyeron a mi formación personal y profesional, con sus buenos consejos y enseñanzas.

Resumen

En el Análisis de Clifford las funciones inframonogénicas pueden ser vistas como una versión no conmutativa de las clásicas funciones armónicas. El uso de conjuntos estructurales φ y ψ en los operadores de Dirac permite considerar una ecuación sándwich más general, cuyas soluciones son denominadas funciones (φ, ψ) -inframonogénicas. En este trabajo se obtiene una nueva descomposición de Fischer para el espacio de polinomios homogéneos de $\mathbb{R}^m$ en términos de funciones (φ, ψ) -inframonogénicas. La descomposición obtenida se extiende a un contexto fraccionario por medio de la derivada de Caputo y las relaciones de Weyl. Además, se estudian problemas de frontera para las funciones inframonogénicas, así como para el sistema de Lamé-Navier y otras ecuaciones diferenciales de orden superior que involucran al operador de Dirac. Las condiciones de frontera de los problemas aseguran el buen planteamiento de los mismos en el sentido de Hadamard. En particular, se muestra que las propiedades tradicionales de las soluciones de los problemas planteados no prevalecen cuando se consideran bases ortonormales distintas de la estándar.

Palabras clave: funciones inframonogénicas, conjuntos estructurales, descomposición de Fischer, problemas de frontera, sistema de Lamé-Navier, ecuaciones de Dirac de orden superior.

Abstract

In Clifford Analysis the inframonogenic functions can be seen as a noncommutative version of the classical harmonic functions. The use of the structural sets φ and ψ in the Dirac operators allows us to consider a more general sandwich equation, whose solutions today are called (φ, ψ) -inframonogenic functions. In this work we obtain a new Fischer decomposition for the space of homogeneous polynomials of $\mathbb{R}^m$ in terms of (φ, ψ) -inframonogenic functions. The obtained decomposition will be extended to a fractional context by means of the Caputo derivative and Weyl relations. In addition, some boundary value problems were studied for the inframonogenic functions, as well as for the Lamé-Navier system and for higher order Dirac equations. The boundary conditions of the problems ensure their well-posedness in the Hadamard sense. In particular, it is shown that the satisfactory problem-solving properties fail if orthonormal bases other than the standard one are considered.

Keywords: inframonogenic functions, structural sets, Fischer decomposition, boundary value problems, Lamé-Navier system, higher order Dirac equations.

Índice general

Introducción	1
1. Nociones preliminares	9
1.1. Aspectos básicos del Análisis de Clifford	9
1.2. Fórmulas de Borel-Pompeiu	13
1.3. Propiedades esenciales de los productos interior y exterior	16
1.4. Descomposición de Helmholtz-Hodge	19
1.5. Conjuntos estructurales	24
2. Descomposición de Fischer	29
2.1. Producto de Fischer	29
2.2. Descomposición de Fischer por funciones (φ, ψ) -inframonomogénicas	32
2.3. Descomposición fraccionaria de Fischer	34
2.4. Funciones (φ, ψ) -armónicas	43
2.4.1. El álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,3}$	44
2.4.2. El álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,2}$	45
3. Problemas de frontera para ecuaciones de Dirac	47
3.1. Resolución de los problemas A y B	47
3.2. Propiedades espectrales	51
3.3. Un enfoque no estándar	53
3.4. Sistema de Lamé-Navier	55
3.5. Operadores de Dirac de orden superior	59
Conclusiones	67
Recomendaciones	68

Bibliografía

69

Introducción

Los métodos del Análisis Complejo son bien conocidos en la investigación de ecuaciones en derivadas parciales (EDP) en el plano. Se pudiera citar una lista suficientemente amplia de artículos y monografías, donde se recogen determinados procedimientos ya clásicos en esta dirección. El Análisis Complejo era una disciplina bastante cerrada, cuyo desarrollo posterior se ha visto impulsado precisamente por el gran número de aplicaciones. Se recomiendan las siguientes referencias canónicas en el tema [25, 44, 54, 74, 91].

El Análisis de Clifford y particularmente, el Análisis Cuaterniónico, constituye una de las extensiones más naturales del Análisis Complejo. Aunque de más reciente creación [31, 55, 56, 59, 63, 69], esta disciplina se ha desarrollado siguiendo dos tendencias a la vez: su propio desarrollo como teoría de funciones y sus innegables posibilidades de aplicación en problemas asociados a EDP sobre espacios de dimensión mayor que 2.

En trabajos recientes se han estudiado EDP de orden superior relacionadas con el operador de Dirac

$$\partial_{\underline{x}} = e_1 \partial_{x_1} + e_2 \partial_{x_2} + \cdots + e_m \partial_{x_m},$$

donde $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ es la base estándar del espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$ que genera al álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$. En toda esta tesis se utilizará la notación de Jacobi ∂_{x_j} para denotar a $\frac{\partial}{\partial x_j}$. El operador de Dirac factoriza al operador de Laplace m -dimensional en el sentido de que $-\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} = \Delta$.

En 2010, Malonek *et al.* [72] consideraron la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\partial_{\underline{x}} f \partial_{\underline{x}} = 0, \tag{1}$$

y nombraron a sus soluciones como funciones inframonogénicas. La no conmutatividad del producto cliffordiano provoca que la ecuación (1) sea esencialmente diferente a la más

tradicional ecuación de Laplace: $\Delta f = -\partial_{\underline{x}}\partial_{\underline{x}}f = 0$. En [72] se obtuvo para $k \geq 2$ la descomposición de Fischer completa

$$\mathcal{P}(k) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \underline{x}^s \mathcal{J}(k-2s) \underline{x}^s, \quad (2)$$

donde $\mathcal{P}(k)$ denota el espacio de todos los polinomios homogéneos de grado k que toman valores sobre $\mathbb{R}_{0,m}$ e $\mathcal{J}(k)$ es el subespacio de este, formado por los polinomios inframonogénicos. Esta descomposición representa una generalización de la clásica descomposición de Fischer por polinomios armónicos [45]. Lávička encontró otra descomposición de Fischer por medio de funciones inframonogénicas aplicando la llamada H -acción del grupo Pin sobre álgebras de Clifford [71]. Varios son los investigadores que se han interesado en el estudio de las funciones inframonogénicas por su estrecha conexión con temas afines de la Elasticidad Lineal, como es el caso del sistema de Lamé-Navier. Por ejemplo, en [51] se probó que el vector de desplazamiento de los puntos de un material elástico, lineal, isótropo, homogéneo y sin fuerzas de volumen puede ser descompuesto en la suma de un campo vectorial armónico y uno inframonogénico. Se remite al lector a consultar los trabajos recientes: [24, 42, 48, 49, 50, 52, 73, 92].

Sea $\varphi = \{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m\} \subset \mathbb{R}^m$. Considérese sobre el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ el operador diferencial dado por la expresión

$$\varphi \partial_{\underline{x}} := \varphi^1 \partial_{x_1} + \varphi^2 \partial_{x_2} + \dots + \varphi^m \partial_{x_m}.$$

En 1987, Nôno e Inenanga probaron que la igualdad

$$\varphi \partial_{\underline{x}} \varphi \partial_{\underline{x}} = -\Delta$$

se satisface si y solo si φ representa una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$ [77]. Cabe mencionar que Nôno había probado previamente esta factorización en el contexto cuaterniónico para una linealización del laplaciano [76]. A tal base ortonormal φ se le llama conjunto estructural. La consideración de conjuntos estructurales en la construcción del operador de Dirac brinda un mayor grado de flexibilidad en el tratamiento de ecuaciones de la Física-Matemática. El término “conjunto estructural” se atribuye a Shapiro, quien lo introdujo en su manuscrito [86], publicado en 1988.

La utilización de conjuntos estructurales permite buscar nuevas perspectivas en varias líneas de investigación relacionadas con mapeos M -conformes, transformadas de Ahlfors-Beurling, $\bar{\partial}$ -problemas, operadores de Dirac generalizados, fórmulas alternativas de Kolosov-Muskhelishvili y descomposiciones aditivas de polinomios contragénicos (ver por ejemplo [1, 6, 9, 57, 58, 68, 88]). Además, con los conjuntos estructurales se pueden reconsiderar desde un punto de vista diferente muchos problemas antiguos de geometría y análisis, como son el recíproco de una función monogénica y la composición de una función monogénica y una transformación de Möbius. Asimismo, los conjuntos estructurales permiten simultáneamente abordar problemas asociados a diversas teorías tradicionales dentro del contexto unificado del análisis hipercomplejo. Un punto de partida importante en esta línea de investigación lo constituyó el trabajo [87].

En los últimos años se han investigado operadores de Dirac involucrando diferentes conjuntos estructurales, donde la existencia de una transformación ortogonal al caso estándar es al menos improbable. Es destacable en esta dirección la aplicación de los conjuntos estructurales como una técnica efectiva en la resolución de problemas de Riemann-Hilbert para funciones poliarmónicas en $\mathbb{R}^m$ [83]. En [30] se puede encontrar una descomposición de Fischer mixta por medio de las soluciones simultáneas de un sistema sobredeterminado en el contexto de conjuntos estructurales distintos. Otra referencia relevante de este tópico es el trabajo [29], donde los autores muestran una fórmula de Borel-Pompeiu, asociada a varios conjuntos estructurales arbitrarios en un contexto generalizado del Análisis de Clifford. El considerar conjuntos estructurales arbitrarios en los operadores de Dirac permite arribar a ecuaciones más generales que podrían ser de interés no solo dentro de la matemática, sino también dentro de la física.

Así surge de manera natural la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\varphi \partial_{\underline{x}} f^{\psi} \partial_{\underline{x}} = 0, \quad (3)$$

donde φ y ψ son conjuntos estructurales arbitrarios. Las soluciones de esta ecuación son denominadas funciones (φ, ψ) -inframonogénicas y generalizan a las ya conocidas funciones inframonogénicas [11, 14, 18, 22]. Note que cuando $\varphi = \psi = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ las ecuaciones (1) y (3) coinciden. Estos sistemas de EDP permiten considerar ecuaciones

generalizadas de Lamé-Navier que se relacionan con sistemas elásticos no homogéneos (ver [5, 13, 21]).

Como parte de la presente tesis se obtienen descomposiciones de Fischer para el espacio de polinomios $\mathcal{P}(k)$ a partir de funciones (φ, ψ) -inframonogénicas. Estas descomposiciones serán abordadas también desde el punto de vista del Cálculo Fraccionario y la metodología del artículo [64], constituyendo un resultado novedoso que generaliza los previamente obtenidos en [71, 72].

Es importante mencionar que en el ámbito del Cálculo Vectorial, cuando se restringe a considerar soluciones vectoriales $f = \vec{u}$ en $\mathbb{R}^3$, la ecuación (1) puede ser reescrita en la forma

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = 0. \quad (4)$$

Por otro lado, note que la ecuación de Laplace también puede ser reescrita como

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = 0. \quad (5)$$

Ese sutil cambio de signo en (4) y (5) provoca que la segunda de estas ecuaciones sea fuertemente elíptica a diferencia de la primera. En general, la unicidad de la solución del problema de Dirichlet asociado a (4) no se satisface y por tanto el problema queda mal planteado en el sentido de Hadamard. Sin embargo, en 1992 Dzhuraev estudió dos problemas de frontera para la ecuación

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \vec{f} \quad (6)$$

en un dominio acotado $G \subset \mathbb{R}^3$, donde $\vec{f}$ denota un campo vectorial suave fijo. Dichos problemas, a diferencia del problema de Dirichlet, sí se comportaban bien planteados. Las condiciones sobre la frontera para el primero de estos problemas eran las siguientes:

$$(\vec{u} \times \vec{n})|_{\Gamma} = 0, \quad (\nabla \cdot \vec{u})|_{\Gamma} = 0, \quad (7)$$

mientras que para el segundo se exigía que

$$(\vec{u} \cdot \vec{n})|_{\Gamma} = 0, \quad (\nabla \times \vec{u})|_{\Gamma} = 0. \quad (8)$$

Aquí $\vec{n}$ denota el vector normal, unitario y exterior sobre Γ , siendo Γ la frontera del dominio G . Dzhuraev obtuvo que las soluciones a ambos problemas estaban dadas mediante operadores integrales compactos sobre el espacio $L^p(G)$, con $p > 1$ [43].

Se ha podido comprobar que el problema de Dirichlet para el sistema (1), y en general para (3), es un problema mal planteado. Este inconveniente motiva a extender los problemas estudiados por Dzhuraev en el Cálculo Vectorial a un escenario multidimensional mediante las herramientas modernas del Análisis de Clifford.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto, no vacío, acotado, regular y simplemente conexo. Sea $n(\underline{x})$ el vector normal, unitario y exterior sobre $\partial\Omega$ en cada punto $\underline{x} \in \partial\Omega$ y sea f_k un campo k -vectorial continuo prefijado sobre Ω . Se tienen los siguientes dos problemas:

PROBLEMA A. Encontrar en $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ las soluciones de la ecuación

$$\partial_{\underline{x}} F_k \partial_{\underline{x}} = f_k, \quad (9)$$

que satisfacen las condiciones de frontera:

$$(n \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\partial_{\underline{x}} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (10)$$

PROBLEMA B. Encontrar en $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ las soluciones de la ecuación (9), que satisfacen las condiciones de frontera:

$$(n \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (11)$$

Las condiciones de frontera en estos problemas presentan los productos interior $(\cdot)$ y exterior $(\wedge)$ de la solución k -vectorial con el vector normal y con el operador de Dirac. Los productos interior y exterior del vector normal con F_k juegan un rol similar al de las componentes normal y tangencial en (7) y (8), mientras que los demás productos con el operador de Dirac se vinculan con la divergencia y el rotacional.

Los problemas A y B generalizan a altas dimensiones los abordados por Dzhuraev. Es de interés en esta tesis estudiar los problemas de frontera antes mencionados, probar si se comportan bien planteados y si sus soluciones también estarán dadas por operadores integrales compactos sobre $L^p(\Omega)$, con $p > 1$. También se estudiarán problemas de

esta tipología cuando se consideran operadores de Dirac contruidos con conjuntos estructurales arbitrarios o cuando las ecuaciones diferenciales son de orden superior a 2.

El *objeto de investigación* son los sistemas elípticos de EDP en el Análisis de Clifford, mientras que el *campo de acción* está determinado por las funciones inframonogénicas y sus generalizaciones.

El principal *objetivo* de esta tesis es obtener descomposiciones de Fischer para el espacio de polinomios de $\mathbb{R}^m$ mediante funciones (φ, ψ) -inframonogénicas y resolver los problemas de frontera A y B.

Su alcance presupone dar respuesta a las *preguntas científicas* siguientes:

- ¿Existirá una descomposición de Fischer para $\mathcal{P}(k)$, como la presentada en (2), en términos de funciones (φ, ψ) -inframonogénicas?
- ¿Los polinomios obtenidos en las descomposiciones halladas son mutuamente ortogonales con respecto al producto de Fischer?
- ¿Cuáles son las directrices a seguir para generalizar las descomposiciones de Fischer en un contexto del Cálculo Fraccionario?
- ¿De existir solución a los problemas A y B esta será única?
- ¿Cómo estarán dadas las soluciones a los problemas A y B mediante la función dato f_k ?
- ¿Los problemas A y B se comportarán bien planteados si se consideran bases ortonormales distintas de la estándar en la construcción del operador de Dirac? En caso de una respuesta negativa, ¿a qué se debería ello?
- ¿Es posible extender estos problemas para los casos de considerar al sistema de Lamé-Navier y a la ecuación poliarmónica?

En aras de obtener respuestas fue necesario realizar las *tareas de investigación* siguientes:

- Revisión bibliográfica sobre nociones teóricas del Análisis de Clifford, el Cálculo Vectorial y Fraccionario, Teoría de Operadores y Álgebra.

- Definición de diferentes tipos de funciones debido a sus relaciones con los operadores de Dirac.
- Estudio de la derivada de Caputo, las relaciones de Weyl y las superálgebras de Lie.
- Demostración de una fórmula de Borel-Pompeiu para k -vectores y de una descomposición de tipo Helmholtz-Hodge.
- Reescritura de ecuaciones de la Física-Matemática por medio del operador de Dirac.
- Profundización en algunos fundamentos analíticos dentro de la Elasticidad Lineal, la compacidad de operadores y la teoría espectral.

Los *métodos de investigación* utilizados en el presente trabajo fueron seleccionados en correspondencia con los objetivos y las tareas de investigación formulados, garantizando así un abordaje coherente y riguroso de los problemas analizados. En el plano teórico se emplearon los métodos histórico-lógico, análisis y síntesis, así como inducción y deducción. Por su parte, en el plano empírico se utilizaron la modelación y el método experimental. La aplicación de estos métodos resultó fundamental para el estudio de las fuentes bibliográficas, el análisis de los antecedentes de la investigación y la sistematización de los fundamentos teóricos y científicos que sustentan los resultados obtenidos.

La problemática investigada ha sido expuesta por el autor en eventos nacionales e internacionales, tales como la Conferencia Internacional sobre Matemáticas y sus Aplicaciones (Ediciones 10, 11 y 12), el Encuentro Virtual de Otoño de la Sección Oriental de la Sociedad Matemática Americana (Octubre 25, 2025), el Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana (Ediciones 55, 56, 57 y 58), la XVI Jornada Científica Estudiantil y el Congreso de Estudiantes de Posgrado (Ediciones III y IV) de la Universidad Autónoma de Guerrero. Los resultados alcanzados han sido publicados en los artículos de investigación [16, 17, 19] y en el libro [10]. Además, estos resultados han sido divulgados en [3, 8, 15, 20, 23], como también han sido difundidos en videos de YouTube y pósteres.

La estructura del trabajo es la siguiente: el capítulo 1 introduce la teoría preliminar necesaria sobre álgebras de Clifford, incluyendo definiciones, notaciones, observaciones, ejemplos y algunos resultados auxiliares, entre ellos la reescritura de la fórmula de Borel-Pompeiu y

la obtención de una descomposición de tipo Helmholtz–Hodge para campos multivectoriales. El capítulo 2 aborda las descomposiciones de Fischer mediante funciones (φ, ψ) -inframonogénicas y sus respectivas generalizaciones. Finalmente, el capítulo 3 concluye con la solución de los problemas A y B, así como con la extensión de estos resultados a operadores de Dirac de orden superior.

Capítulo 1

Nociones preliminares

En este capítulo se exponen los fundamentos teóricos que sirven de base a la presente investigación. Cuenta con cinco secciones. En la sección 1.1 se abordan algunos preliminares algebraicos y analíticos necesarios para el trabajo con álgebras de Clifford. La sección 1.2 presenta algunas fórmulas de Borel-Pompeiu y sus consecuencias inmediatas. Posteriormente, en sección 1.3 se demuestran propiedades importantes de los productos interior $(\cdot)$ y exterior $(\wedge)$, las cuales generalizan algunas de las más conocidas del Cálculo Vectorial. Una descomposición de tipo Helmholtz-Hodge es obtenida en la sección 1.4. Finalmente, la sección 1.5 está dedicada a los conjuntos estructurales y sus aplicaciones en el estudio de sistemas de EDP.

1.1. Aspectos básicos del Análisis de Clifford

La siguiente definición de álgebra de Clifford está dada por Gürlebeck *et al.* en [55, pág. 52]:

Definición 1 (Álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{p,q}$). *Sea el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{m+1}$ con la base canónica $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, \dots, e_m\}$ sujeta a las siguientes relaciones multiplicativas:*

$$\begin{aligned} e_0 e_i &= e_i e_0 = e_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ e_i e_j &= -e_j e_i, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, m, \\ e_0^2 &= e_1^2 = \dots = e_p^2 = 1, \\ e_{p+1}^2 &= e_{p+2}^2 = \dots = e_{p+q}^2 = -1, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $p \in \{0, 1, \dots, m\}$ y $q := m - p$. La base $\mathcal{B}$ y las relaciones (1.1) generan una base de un álgebra 2^m -dimensional $\mathcal{A} = \mathbb{R}_{p,q}$:

$$e_0; e_1, e_2, \dots, e_m; e_1e_2, e_1e_3, \dots, e_{m-1}e_m; \dots; e_1e_2\dots e_m,$$

con elemento unitario e_0 . El álgebra construida recibe el nombre de álgebra de Clifford universal $\mathbb{R}_{p,q}$.

De particular importancia son las álgebras de Clifford con $p = 0$, las cuales generalizan directamente al álgebra de los números complejos $\mathbb{C}$ y al álgebra de los cuaternios reales de Hamilton $\mathbb{H}(\mathbb{R})$. Cabe destacar que existe un isomorfismo entre $\mathbb{R}_{0,1}$ y $\mathbb{C}$; así como también entre $\mathbb{R}_{0,2}$ y $\mathbb{H}(\mathbb{R})$. En lo que resta de este trabajo serán de nuestro interés solo las álgebras $\mathbb{R}_{0,m}$. El espacio vectorial $\mathbb{R}^m$ está inmerso en $\mathbb{R}_{0,m}$ al poder identificar cada vector $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ con el elemento $\underline{x} = e_1x_1 + e_2x_2 + \dots + e_mx_m \in \mathbb{R}_{0,m}$. Un elemento $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ puede ser escrito como $a = \sum_A a_A e_A$, donde a_A son constantes reales y A recorre todos los posibles conjuntos ordenados

$$A = \{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\}$$

o $A = \emptyset$, y $e_A = e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m}$, $e_\emptyset = e_0 = 1$. En particular, $Sc[a]$ se refiere a la parte escalar de a . Nótese que cualquier $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ admite la descomposición única:

$$a = [a]_0 + [a]_1 + \dots + [a]_m, \quad (1.2)$$

donde $[.]_k$ denota la proyección de $\mathbb{R}_{0,m}$ en $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$. Aquí $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$ denota al subespacio de k -vectores definido por

$$\mathbb{R}_{0,m}^{(k)} = \text{span}_{\mathbb{R}}(e_A : |A| = k).$$

Los elementos de $\mathbb{R}_{0,m}^{(0)}$, $\mathbb{R}_{0,m}^{(1)}$, $\mathbb{R}_{0,m}^{(0)} \oplus \mathbb{R}_{0,m}^{(1)}$, $\mathbb{R}_{0,m}^{(2)}$ y $\mathbb{R}_{0,m}^{(m)}$ son comúnmente conocidos como escalares, vectores, paravectores, bivectores y pseudoescalares, respectivamente.

Para un vector v y un k -vector F_k , su producto vF_k resulta en un $(k-1)$ -vector y un $(k+1)$ -vector:

$$vF_k = [vF_k]_{k-1} + [vF_k]_{k+1},$$

donde

$$[vF_k]_{k-1} = \frac{1}{2}[vF_k - (-1)^k F_k v]$$

y

$$[vF_k]_{k+1} = \frac{1}{2}[vF_k + (-1)^k F_k v].$$

Los productos interior y exterior entre v y F_k son definidos por

$$v \cdot F_k := [vF_k]_{k-1} \quad \text{y} \quad v \wedge F_k := [vF_k]_{k+1},$$

respectivamente. El espacio $\mathbb{R}_{0,m}$ también puede ser descompuesto en dos subespacios 2^{m-1} -dimensionales $\mathbb{R}_{0,m}^+$ y $\mathbb{R}_{0,m}^-$, los cuales contienen los multivectores pares e impares:

$$\mathbb{R}_{0,m} = \mathbb{R}_{0,m}^+ \oplus \mathbb{R}_{0,m}^-.$$

Cabe mencionar que $\mathbb{R}_{0,m}^+$ es una subálgebra de $\mathbb{R}_{0,m}$ llamada subálgebra par. La subálgebra par del álgebra del espacio-tiempo de Minkowski es isomorfa al álgebra de Pauli $\mathbb{R}_{3,0}$, y esta a su vez tiene una subálgebra par isomorfa al álgebra de los cuaternios reales $\mathbb{H}(\mathbb{R})$; mientras que los números complejos $\mathbb{C}$ representan la subálgebra par de $\mathbb{H}(\mathbb{R})$.

Todo elemento cliffordiano a es suma de su parte par

$$a^+ = \sum_{k-\text{par}} [a]_k$$

y su parte impar

$$a^- = \sum_{k-\text{impar}} [a]_k.$$

La conjugación es una anti-involución definida por las relaciones $\bar{e}_i = -e_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Por ende,

$$\bar{a} = \sum_A a_A \bar{e}_A, \quad \bar{e}_A = (-1)^{\frac{|A|(|A|+1)}{2}} e_A.$$

Una norma $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{R}_{0,m}$ es definida por $\|a\|^2 = [a\bar{a}]_0$ para $a \in \mathbb{R}_{0,m}$. Note que para $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ se tiene la igualdad $\|\underline{x}\| = |\underline{x}|$, o sea, la norma euclidiana usual.

Para un análisis detallado de los fundamentos básicos relacionados con las álgebras de Clifford se invita al lector a consultar las referencias: [31, 36, 37, 38, 39, 55, 59, 60, 78, 80, 81, 89].

En este trabajo se denotará por Ω a cualquier conjunto abierto, no vacío, acotado, regular y simplemente conexo de $\mathbb{R}^m$. El vector normal, unitario y exterior sobre $\partial\Omega$ en cada punto

$\underline{x} \in \partial\Omega$ será denotado por $n(\underline{x})$. Se considerarán funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{0,m}$, las cuales puedan ser escritas como $f(\underline{x}) = \sum_A f_A(\underline{x})e_A$, donde f_A son funciones reales en Ω . Particularmente, se referirá con el término de campos k -vectoriales a las funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$. Las nociones de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad tienen el sentido usual a través de sus componentes reales, es decir, una función será continua, diferenciable o integrable si todas sus componentes reales lo son. Los espacios de funciones k -veces continuamente diferenciables y p -integrables sobre Ω serán denotados por $C^k(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$, respectivamente.

El espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ estará equipado con el producto escalar siguiente:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} \overline{u(\underline{x})} v(\underline{x}) d\underline{x} \right]_0.$$

Se introduce el espacio de Sobolev $W_p^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq p < \infty$, como el módulo por la derecha de todas las funcionales f del espacio de distribuciones atemperadas, cuyas derivadas

$$D_w^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

pertenecen a $L^p(\Omega)$, con la norma

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D_w^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^m$ es un multi-índice y $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ para $|\alpha| < k$. Cabe resaltar que los espacios funcionales $C^k(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ y $W_p^k(\Omega)$ pueden también ser definidos sobre cualquier subconjunto apropiado de $\mathbb{R}^m$. Para más detalles acerca de los módulos de funciones que toman valores en $\mathbb{R}_{0,m}$ se refiere al libro por excelencia [31, Cap. 1, págs. 13-40].

El operador de Dirac estándar $\partial_{\underline{x}}$ está dado por

$$\partial_{\underline{x}} := e_1 \partial_{x_1} + e_2 \partial_{x_2} + \dots + e_m \partial_{x_m}. \quad (1.3)$$

Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{0,m}$, definida y diferenciable en Ω , es llamada monogénica por la izquierda (derecha) si $\partial_{\underline{x}} f = 0$ ($f \partial_{\underline{x}} = 0$) en Ω . La monogenicidad puede ser concebida como una generalización multidimensional de la noción de holomorfía del Análisis Complejo.

Se dice que una función $f \in C^s(\Omega)$ es s -monogénica o polimonogénica, por la izquierda (derecha), si cumple que $\partial_{\underline{x}}^s f = 0$ ($f \partial_{\underline{x}}^s = 0$) en Ω .

Sea F_k un campo k -vectorial. La acción del operador de Dirac sobre F_k puede escribirse como:

$$\partial_{\underline{x}} F_k = \partial_{\underline{x}} \cdot F_k + \partial_{\underline{x}} \wedge F_k, \quad (1.4)$$

donde

$$\partial_{\underline{x}} \cdot F_k = \frac{1}{2} [\partial_{\underline{x}} F_k - (-1)^k F_k \partial_{\underline{x}}] = [\partial_{\underline{x}} F_k]_{k-1} \quad (1.5)$$

y

$$\partial_{\underline{x}} \wedge F_k = \frac{1}{2} [\partial_{\underline{x}} F_k + (-1)^k F_k \partial_{\underline{x}}] = [\partial_{\underline{x}} F_k]_{k+1}. \quad (1.6)$$

Estos productos, interior $(\cdot)$ y exterior $(\wedge)$, serán necesarios para reescribir y factorizar las ecuaciones de los problemas de frontera que se tratarán en el capítulo 3.

Como se ha mencionado en la introducción, una función $f \in C^2(\Omega)$ se dice que es infra-monogénica en Ω si

$$\partial_{\underline{x}} f \partial_{\underline{x}} = 0 \quad (1.7)$$

en Ω , mientras que las soluciones de los sistemas más generales

$$\Delta^s f = 0 \quad (1.8)$$

y

$$\partial_{\underline{x}}^{2s-1} f \partial_{\underline{x}} = 0, \quad s \in \mathbb{Z}_+^*, \quad (1.9)$$

son conocidas como funciones poliarmónicas e infrapolimonogénicas, respectivamente (ver [2] y [79]).

1.2. Fórmulas de Borel-Pompeiu

La solución fundamental del operador de Dirac (1.3) está dada por

$$E_0(\underline{x}) = \partial_{\underline{x}} E_1(\underline{x}), \quad (1.10)$$

donde

$$E_1(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{1}{(m-2)\sigma_m |\underline{x}|^{m-2}}, & m > 2, \\ \frac{1}{2\pi} \ln |\underline{x}|, & m = 2, \end{cases} \quad (1.11)$$

es la solución fundamental del operador de Laplace m -dimensional Δ . Aquí σ_m denota el área superficial de la bola unitaria en $\mathbb{R}^m$.

La función

$$E_0(\underline{x}) = -\frac{1}{\sigma_m} \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^m}, \quad (1.12)$$

se conoce como núcleo de Clifford-Cauchy y satisface en $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ la ecuación:

$$\partial_{\underline{x}} E_0(\underline{x}) = E_0(\underline{x}) \partial_{\underline{x}} = 0.$$

Este núcleo genera los siguientes dos importantes operadores integrales:

$$(\mathcal{T}g)(\underline{x}) = - \int_{\Omega} E_0(\underline{y} - \underline{x}) g(\underline{y}) d\underline{y} \quad (1.13)$$

y

$$(\mathcal{C}g)(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega} E_0(\underline{y} - \underline{x}) n(\underline{y}) g(\underline{y}) d\underline{y}, \quad \underline{x} \notin \partial\Omega, \quad (1.14)$$

los cuales se conocen como transformadas de Teodorescu y Cauchy, respectivamente. Una relación profunda entre ambos operadores está dada por la siguiente fórmula de Borel-Pompeiu o de Cauchy-Riemann en el Análisis de Clifford:

Teorema 1 (Fórmula de Borel-Pompeiu). [55, pág. 129]. Sea $f \in C^1(\overline{\Omega})$, se cumple que

$$(\mathcal{C}f)(\underline{x}) + (\mathcal{T}\partial_{\underline{x}}f)(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}), & \underline{x} \in \Omega, \\ 0, & \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}. \end{cases} \quad (1.15)$$

Teorema 2 (Fórmula integral de Cauchy). Sea $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Si f es una función monogénica por la izquierda en Ω entonces se evidencia que

$$(\mathcal{C}f)(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}), & \underline{x} \in \Omega, \\ 0, & \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}. \end{cases} \quad (1.16)$$

La versión de la fórmula (1.15) para el caso en que el operador de Dirac aparece por la derecha de la función puede concebirse si en las transformadas (1.13) y (1.14) se intercambia el núcleo de Clifford-Cauchy con la función. La siguiente fórmula es una reescritura de (1.15) para campos k -vectoriales.

Teorema 3. Sea $F_k \in C^1(\overline{\Omega})$ un campo k -vectorial. Se tiene en Ω que

$$\begin{aligned} F_k(\underline{x}) = & \partial_{\underline{x}} \cdot \left[\int_{\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x}) (\partial_{\underline{y}} \wedge F_k)(\underline{y}) d\underline{y} - \int_{\partial\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x}) (n \wedge F_k)(\underline{y}) d\underline{y} \right] \\ & + \partial_{\underline{x}} \wedge \left[\int_{\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x}) (\partial_{\underline{y}} \cdot F_k)(\underline{y}) d\underline{y} - \int_{\partial\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x}) (n \cdot F_k)(\underline{y}) d\underline{y} \right]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Demostración:

Por un cálculo directo se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \partial_{\underline{x}} \cdot \left[\int_{\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x})(\partial_{\underline{y}} \wedge F_k)(\underline{y}) d\underline{y} \right] + \partial_{\underline{x}} \wedge \left[\int_{\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x})(\partial_{\underline{y}} \cdot F_k)(\underline{y}) d\underline{y} \right] \\
 &= \left[- \int_{\Omega} E_0(\underline{y} - \underline{x})(\partial_{\underline{y}} F_k) d\underline{y} \right]_k, \\
 &- \partial_{\underline{x}} \cdot \left[\int_{\partial\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x})(n \wedge F_k)(\underline{y}) d\underline{y} \right] - \partial_{\underline{x}} \wedge \left[\int_{\partial\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x})(n \cdot F_k)(\underline{y}) d\underline{y} \right] \\
 &= \left[\int_{\partial\Omega} E_0(\underline{y} - \underline{x}) n(\underline{y}) F_k(\underline{y}) d\underline{y} \right]_k.
 \end{aligned}$$

Haciendo uso de la fórmula de Borel-Pompeiu (1.15), el resultado sigue inmediatamente.

□

En [50] se obtuvo la siguiente fórmula de Borel-Pompeiu que involucra al operador sándwich $\partial_{\underline{x}}(\cdot)\partial_{\underline{x}}$:

Teorema 4. *Sea $f \in C^2(\overline{\Omega})$. Se tiene que*

$$\begin{aligned}
 f(\underline{x}) &= \int_{\partial\Omega} f(\underline{y}) n(\underline{y}) E_0(\underline{y} - \underline{x}) d\underline{y} + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} E_0(\underline{y} - \underline{x}) n(\underline{y}) (f(\underline{y}) \partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x}) d\underline{y} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m e_i \int_{\partial\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x}) n(\underline{y}) (f(\underline{y}) \partial_{\underline{y}}) d\underline{y} e_i - \frac{1}{2} \int_{\Omega} E_0(\underline{y} - \underline{x}) (\partial_{\underline{y}} f(\underline{y}) \partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x}) d\underline{y} \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m e_i \int_{\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x}) (\partial_{\underline{y}} f(\underline{y}) \partial_{\underline{y}}) d\underline{y} e_i.
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Como consecuencia de (1.18) se obtiene una fórmula de representación integral de Cauchy para las funciones inframonogénicas:

Teorema 5. *Sea $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Si f es una función inframonogénica en Ω entonces se tiene en Ω que*

$$\begin{aligned}
 f(\underline{x}) &= \int_{\partial\Omega} f(\underline{y}) n(\underline{y}) E_0(\underline{y} - \underline{x}) d\underline{y} + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} E_0(\underline{y} - \underline{x}) n(\underline{y}) (f(\underline{y}) \partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x}) d\underline{y} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m e_i \int_{\partial\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x}) n(\underline{y}) (f(\underline{y}) \partial_{\underline{y}}) d\underline{y} e_i.
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Se remite al lector a los trabajos [2, 79, 81] donde puede consultar las fórmulas integrales de tipo Cauchy para las funciones polimonogénicas, poliarmónicas e infrapolimonogénicas.

1.3. Propiedades esenciales de los productos interior y exterior

En el contexto del Cálculo Vectorial es conocido que si κ es un campo escalar diferenciable entonces para cualquier campo vectorial diferenciable $\vec{u}$ se tienen las relaciones:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\kappa \vec{u}) &= (\nabla \kappa) \cdot \vec{u} + \kappa (\nabla \cdot \vec{u}), \\ \nabla \times (\kappa \vec{u}) &= (\nabla \kappa) \times \vec{u} + \kappa (\nabla \times \vec{u}).\end{aligned}$$

La siguiente proposición generaliza estas fórmulas para el caso de k -vectores de $\mathbb{R}_{0,m}$:

Proposición 1. Sea $F_k \in C^1(\Omega)$ un campo k -vectorial. Si $g \in C^1(\Omega)$ es un campo escalar, entonces las siguientes fórmulas se tienen:

$$\begin{aligned}(i) \quad \partial_{\underline{x}} \cdot (g F_k) &= (\partial_{\underline{x}} g) \cdot F_k + g (\partial_{\underline{x}} \cdot F_k), \\ (ii) \quad \partial_{\underline{x}} \wedge (g F_k) &= (\partial_{\underline{x}} g) \wedge F_k + g (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k).\end{aligned}$$

Demostración:

Se probará (i), la segunda identidad puede ser obtenida análogamente:

$$\begin{aligned}\partial_{\underline{x}} \cdot (g F_k) &= \frac{1}{2} [\partial_{\underline{x}} (g F_k) - (-1)^k (g F_k) \partial_{\underline{x}}] \\ &= \frac{1}{2} [(\partial_{\underline{x}} g) F_k + g (\partial_{\underline{x}} F_k) - (-1)^k g (F_k \partial_{\underline{x}}) - (-1)^k F_k (g \partial_{\underline{x}})] \\ &= (\partial_{\underline{x}} g) \cdot F_k + g (\partial_{\underline{x}} \cdot F_k).\end{aligned}$$

□

Proposición 2. Sea F_k un campo k -vectorial dos veces continuamente diferenciable, entonces:

$$\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \cdot F_k = 0 \tag{1.20}$$

y

$$\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \wedge F_k = 0. \tag{1.21}$$

Demostración:

Se demostrará (1.20). La prueba para (1.21) es similar.

$$\begin{aligned}
 \partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \cdot F_k &= \frac{1}{2} \partial_{\underline{x}} \cdot [\partial_{\underline{x}} F_k - (-1)^k F_k \partial_{\underline{x}}] \\
 &= \frac{1}{4} [\partial_{\underline{x}} (\partial_{\underline{x}} F_k - (-1)^k F_k \partial_{\underline{x}}) - (-1)^{k-1} (\partial_{\underline{x}} F_k - (-1)^k F_k \partial_{\underline{x}}) \partial_{\underline{x}}] \\
 &= \frac{1}{4} [-\Delta F_k - (-1)^k \partial_{\underline{x}} F_k \partial_{\underline{x}} + (-1)^k \partial_{\underline{x}} F_k \partial_{\underline{x}} + \Delta F_k] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

Note que las relaciones (1.20) y (1.21) son las análogas multidimensionales de las siguientes del Cálculo Vectorial: $\nabla \cdot \nabla \times \vec{u} = 0$ y $\nabla \times \nabla \kappa = 0$.

El operador sándwich y el laplaciano mantienen invariante el espacio de campos k -vectoriales. Este hecho se implica gracias a las siguientes identidades que son fácilmente obtenidas haciendo uso de la Proposición 2:

$$-\Delta F_k = \partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge F_k + \partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot F_k, \quad (1.22)$$

$$\partial_{\underline{x}} F_k \partial_{\underline{x}} = (-1)^k (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge F_k - \partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot F_k), \quad (1.23)$$

siendo $F_k \in C^2(\Omega)$ un campo k -vectorial. Gracias a (1.22) y (1.23) se puede apreciar perfectamente que el operador $\partial_{\underline{x}}(\cdot)\partial_{\underline{x}}$ se comporta como Δ para campos escalares y pseudoescalares.

Teorema 6 (Fórmulas de Stokes). *Sea $F_k \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m}^{(k)})$, entonces*

$$\int_{\Omega} (\partial_{\underline{x}} \cdot F_k)(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} n(\underline{x}) \cdot F_k(\underline{x}) d\underline{x}$$

y

$$\int_{\Omega} (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} n(\underline{x}) \wedge F_k(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Demostración:

Usando el Teorema de Gauß en $\mathbb{R}_{0,m}$ (ver [55, pág. 354]) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (\partial_{\underline{x}} F_k)(\underline{x}) d\underline{x} &= \int_{\partial\Omega} n(\underline{x}) F_k(\underline{x}) d\underline{x} \\
 \int_{\Omega} [(\partial_{\underline{x}} \cdot F_k)(\underline{x}) + (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)(\underline{x})] d\underline{x} &= \int_{\partial\Omega} [n(\underline{x}) \cdot F_k(\underline{x}) + n(\underline{x}) \wedge F_k(\underline{x})] d\underline{x},
 \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\int_{\Omega} (\partial_{\underline{x}} \cdot F_k)(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} n(\underline{x}) \cdot F_k(\underline{x}) d\underline{x}$$

y

$$\int_{\Omega} (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} n(\underline{x}) \wedge F_k(\underline{x}) d\underline{x}.$$

□

Proposición 3. Si el campo k -vectorial $F_k \in C^1(\overline{\Omega})$ satisface la condición de frontera

$$(n \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0,$$

entonces

$$[n \wedge (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)]|_{\partial\Omega} = 0.$$

Demostración:

Aplicando el Teorema de Gauß en $\mathbb{R}_{0,m}$ (ver [55, pág. 354]) se arriba a lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(G \partial_{\underline{x}}) F_k + G(\partial_{\underline{x}} F_k)] d\underline{x} \\ &= \int_{\partial\Omega} [G \cdot (n \cdot F_k) + G \wedge (n \cdot F_k) + G \cdot (n \wedge F_k) + G \wedge (n \wedge F_k)] d\underline{x}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde G es campo vectorial diferenciable arbitrario en Ω y continuo hasta $\partial\Omega$.

Sea un campo escalar arbitrario $G_0 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ y use (1.24), con G como $G_0 \partial_{\underline{x}}$, para obtener

$$\int_{\Omega} G \wedge (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k) d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} G \wedge (n \wedge F_k) d\underline{x} = 0. \quad (1.25)$$

Combinando la Proposición 1-(ii) con la Proposición 2-(1.21), se puede apreciar que

$$G \wedge (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k) = \partial_{\underline{x}} \wedge [G_0(\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)] - G_0[\partial_{\underline{x}} \wedge (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)] = \partial_{\underline{x}} \wedge [G_0(\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)].$$

Por (1.25) y Teorema 6 se tiene

$$\int_{\Omega} \partial_{\underline{x}} \wedge [G_0(\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)] d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} G_0 n \wedge (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k) d\underline{x} = 0.$$

Debido a la arbitrariedad de G_0 se concluye que $[n \wedge (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)]|_{\partial\Omega} = 0$. □

Argumentos semejantes a los anteriores pueden ser utilizados para mostrar el siguiente resultado:

Proposición 4. Sea $F_k \in C^1(\overline{\Omega})$ un campo k -vectorial satisfaciendo la siguiente condición de frontera

$$(n \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Entonces,

$$[n \cdot (\partial_{\underline{x}} \cdot F_k)]|_{\partial\Omega} = 0.$$

1.4. Descomposición de Helmholtz-Hodge

En [62, pág. 38], Helmholtz formuló el Teorema Fundamental del Cálculo Vectorial aplicado a las componentes de la velocidad de flujo en Mecánica de Fluidos. Ahora se procederá a derivar una descomposición de tipo Helmholtz-Hodge, la cual permite caracterizar algunos campos k -vectoriales F_k en $\mathbb{R}^m$ conociendo los productos: $\partial_{\underline{x}} \cdot F_k$ y $\partial_{\underline{x}} \wedge F_k$.

Teorema 7 (Descomposición de Helmholtz-Hodge). *Sea F_k un campo k -vectorial suficientemente suave definido sobre $\mathbb{R}^m$, el cual es de orden $o(1/\|\underline{x}\|)$ para $\|\underline{x}\| \rightarrow \infty$. Entonces F_k admite una descomposición única:*

$$F_k = \partial_{\underline{x}} \cdot P_{k+1} + \partial_{\underline{x}} \wedge Q_{k-1},$$

donde $P_{k+1} \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m}^{(k+1)})$ y $Q_{k-1} \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m}^{(k-1)})$ satisfacen

$$(\partial_{\underline{x}} \cdot Q_{k-1})|_{\mathbb{R}^m} = 0$$

y

$$(\partial_{\underline{x}} \wedge P_{k+1})|_{\mathbb{R}^m} = 0.$$

Los potenciales de Helmholtz P_{k+1} y Q_{k-1} son dados por las fórmulas explícitas siguientes:

$$P_{k+1}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^m} E_1(\underline{y} - \underline{x})(\partial_{\underline{y}} \wedge F_k)(\underline{y}) d\underline{y}, \quad (1.26)$$

$$Q_{k-1}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^m} E_1(\underline{y} - \underline{x})(\partial_{\underline{y}} \cdot F_k)(\underline{y}) d\underline{y}. \quad (1.27)$$

Demostración:

Primeramente, se introduce el siguiente ansatz:

$$F_k := \partial_{\underline{x}} \cdot P_{k+1} + \partial_{\underline{x}} \wedge Q_{k-1},$$

donde $\partial_{\underline{x}} \cdot Q_{k-1} = 0$ y $\partial_{\underline{x}} \wedge P_{k+1} = 0$. Aplicando la Proposición 2 y la ecuación (1.22) se obtiene que

$$\begin{aligned}\partial_{\underline{x}} \cdot F_k &= \partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge Q_{k-1} = -\Delta Q_{k-1}, \\ \partial_{\underline{x}} \wedge F_k &= \partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot P_{k+1} = -\Delta P_{k+1}.\end{aligned}$$

Los términos $\partial_{\underline{x}} \cdot F_k$ y $\partial_{\underline{x}} \wedge F_k$ son los miembros derechos de una ecuación de Poisson, cuyas soluciones están dadas por (1.26) y (1.27), tomando en cuenta la condición de decaimiento para F_k . Para probar la unicidad se asume que existen otros dos campos P'_{k+1} y Q'_{k-1} , los cuales también pueden ser usados para representar de la misma forma al campo k -vectorial F_k . Siguiendo el mismo procedimiento se arriba nuevamente a las ecuaciones de Poisson: $\partial_{\underline{x}} \cdot F_k = -\Delta Q'_{k-1}$ y $\partial_{\underline{x}} \wedge F_k = -\Delta P'_{k+1}$. Por tanto, se tienen las ecuaciones de Laplace: $\Delta(P_{k+1} - P'_{k+1}) = 0$ y $\Delta(Q_{k-1} - Q'_{k-1}) = 0$. Gracias a la condición de decaimiento en el infinito para F_k se obtiene que $P_{k+1} = P'_{k+1}$ y $Q_{k-1} = Q'_{k-1}$.

Ahora se procede a probar el ansatz. Por la condición de decaimiento de F_k y según la fórmula de Borel-Pompeiu (1.15) se tiene la representación

$$F_k(\underline{x}) = - \int_{\mathbb{R}^m} E_0(\underline{y} - \underline{x}) (\partial_{\underline{y}} F_k)(\underline{y}) d\underline{y}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}F_k(\underline{x}) &= - \int_{\mathbb{R}^m} E_0(\underline{y} - \underline{x}) \cdot (\partial_{\underline{y}} \wedge F_k)(\underline{y}) d\underline{y} - \int_{\mathbb{R}^m} E_0(\underline{y} - \underline{x}) \wedge (\partial_{\underline{y}} \cdot F_k)(\underline{y}) d\underline{y}, \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^m} E_0(\underline{y} - \underline{x}) \wedge (\partial_{\underline{y}} \wedge F_k)(\underline{y}) d\underline{y} = 0\end{aligned}$$

y

$$- \int_{\mathbb{R}^m} E_0(\underline{y} - \underline{x}) \cdot (\partial_{\underline{y}} \cdot F_k)(\underline{y}) d\underline{y} = 0.$$

Se calcula directamente

$$\begin{aligned}\partial_{\underline{x}} \cdot P_{k+1} &= \partial_{\underline{x}} \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^m} E_1(\underline{y} - \underline{x}) (\partial_{\underline{y}} \wedge F_k)(\underline{y}) d\underline{y} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[- \int_{\mathbb{R}^m} E_0(\underline{y} - \underline{x}) (\partial_{\underline{y}} \wedge F_k)(\underline{y}) d\underline{y} + (-1)^{k+1} \int_{\mathbb{R}^m} (\partial_{\underline{y}} \wedge F_k)(\underline{y}) E_0(\underline{y} - \underline{x}) d\underline{y} \right] \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m} E_0(\underline{y} - \underline{x}) \cdot (\partial_{\underline{y}} \wedge F_k)(\underline{y}) d\underline{y},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_{\underline{x}} \wedge Q_{k-1} &= \partial_{\underline{x}} \wedge \left[\int_{\mathbb{R}^m} E_1(\underline{y} - \underline{x})(\partial_{\underline{y}} \cdot F_k)(\underline{y}) d\underline{y} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[- \int_{\mathbb{R}^m} E_0(\underline{y} - \underline{x})(\partial_{\underline{y}} \cdot F_k)(\underline{y}) d\underline{y} + (-1)^k \int_{\mathbb{R}^m} (\partial_{\underline{y}} \cdot F_k)(\underline{y}) E_0(\underline{y} - \underline{x}) d\underline{y} \right] \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^m} E_0(\underline{y} - \underline{x}) \wedge (\partial_{\underline{y}} \cdot F_k)(\underline{y}) d\underline{y}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, $F_k = \partial_{\underline{x}} \cdot P_{k+1} + \partial_{\underline{x}} \wedge Q_{k-1}$. Finalmente, se obtiene

$$\partial_{\underline{x}} \wedge P_{k+1} = \partial_{\underline{x}} \wedge \left[\int_{\mathbb{R}^m} E_1(\underline{y} - \underline{x})(\partial_{\underline{y}} \wedge F_k)(\underline{y}) d\underline{y} \right] = - \int_{\mathbb{R}^m} E_0(\underline{y} - \underline{x}) \wedge (\partial_{\underline{y}} \wedge F_k)(\underline{y}) d\underline{y} = 0$$

y

$$\partial_{\underline{x}} \cdot Q_{k-1} = \partial_{\underline{x}} \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^m} E_1(\underline{y} - \underline{x})(\partial_{\underline{y}} \cdot F_k)(\underline{y}) d\underline{y} \right] = - \int_{\mathbb{R}^m} E_0(\underline{y} - \underline{x}) \cdot (\partial_{\underline{y}} \cdot F_k)(\underline{y}) d\underline{y} = 0.$$

□

Dos referencias recomendables sobre este tema son los libros [44, 54].

Un resultado ampliamente utilizado en el Cálculo Vectorial es que un campo vectorial suave $\vec{u}$ es determinado únicamente cuando su divergencia y rotacional se conocen en Ω junto con la componente tangencial (o normal) en $\partial\Omega$ (ver [27, 28, 40, 41, 53, 56, 62]). A continuación se demuestra una versión de este resultado para campos k -vectoriales.

Teorema 8. *Un campo k -vectorial suave $F_k \in C^1(\overline{\Omega})$ queda únicamente determinado en Ω cuando $\partial_{\underline{x}} \cdot F_k$ y $\partial_{\underline{x}} \wedge F_k$ son conocidos en Ω , junto con alguno de los valores de $n \cdot F_k$ o $n \wedge F_k$ sobre la frontera $\partial\Omega$.*

Demostración:

Sea el sistema

$$\begin{aligned}
 (\partial_{\underline{x}} \cdot F_k)|_{\Omega} &= f_1, \\
 (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)|_{\Omega} &= f_2,
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

ya sea con la condición de frontera

$$(n \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = f_n, \tag{1.29}$$

o

$$(n \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = f_t, \quad (1.30)$$

donde f_1, f_2, f_n, f_t son funciones dadas. Como antes se mostró en (1.17), el campo k -vectorial $F_k \in L^2(\Omega)$ puede ser descompuesto como la suma de $G_1 = \partial_{\underline{x}} \wedge Q_{k-1}$, $G_1 \in L^2(\Omega)$ y $G_2 = \partial_{\underline{x}} \cdot P_{k+1}$, $G_2 \in L^2(\Omega)$, donde $\partial_{\underline{x}} \cdot Q_{k-1} = 0$ y $\partial_{\underline{x}} \wedge P_{k+1} = 0$. Por (1.28)-(1.29)-(1.30) se tiene que G_1 y G_2 tendrán que satisfacer:

$$F_k = G_1 + G_2 = \partial_{\underline{x}} \wedge Q_{k-1} + \partial_{\underline{x}} \cdot P_{k+1}, \quad (1.31)$$

$$(\partial_{\underline{x}} \cdot G_1)|_{\Omega} = f_1,$$

$$(\partial_{\underline{x}} \wedge G_2)|_{\Omega} = f_2,$$

$$(n \cdot G_2)|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow (n \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge Q_{k-1}))|_{\partial\Omega} = f_n, \quad (1.32)$$

o

$$(n \wedge G_1)|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow (n \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot P_{k+1}))|_{\partial\Omega} = f_t. \quad (1.33)$$

Posteriormente, se probará la ortogonalidad de la representación (1.31) para ambos casos de los requerimientos (1.32) o (1.33). Se tiene que

$$\begin{aligned} \left[\int_{\Omega} \overline{G_1} G_2 d\underline{y} \right]_0 &= \left[(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}+1} \int_{\Omega} (Q_{k-1} \partial_{\underline{y}}) G_2 d\underline{y} \right]_0 \\ &= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}+1} \left[\int_{\partial\Omega} Q_{k-1} (n \cdot G_2) d\underline{y} - \int_{\Omega} Q_{k-1} (\partial_{\underline{y}} \cdot G_2) d\underline{y} \right]_0 = 0 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \left[\int_{\Omega} \overline{G_1} G_2 d\underline{y} \right]_0 &= \left[\int_{\Omega} \overline{G_1} (\partial_{\underline{y}} P_{k+1}) d\underline{y} \right]_0 \\ &= (-1)^{\frac{k(k+3)}{2}} \left[\int_{\partial\Omega} (n \wedge G_1) P_{k+1} d\underline{y} - \int_{\Omega} (\partial_{\underline{y}} \wedge G_1) P_{k+1} d\underline{y} \right]_0 = 0. \end{aligned}$$

Por ende, en ambos casos, existe una proyección ortogonal denotada como sigue:

$$\begin{aligned} - P_V \text{ en } V \text{ tal que } P_V(F_k) = G_2, \text{ donde } G_2 \in V = \{Y_k \in L^2(\Omega) : (\partial_{\underline{x}} \cdot Y_k)|_{\Omega} = \\ 0, (n \cdot Y_k)|_{\partial\Omega} = 0\}, \text{ o} \end{aligned}$$

- $P_{V'}$ en V' tal que $P_{V'}(F_k) = G_2$, donde $G_2 \in V' = \{Y_k \in L^2(\Omega) : (\partial_{\underline{x}} \cdot Y_k)|_{\Omega} = 0, (n \wedge Y_k - f_t)|_{\partial\Omega} = 0\}$.

La existencia de la representación, cuando la condición de frontera (1.32) es fijada, sigue del hecho que el problema de Neumann asociado a (1.32):

$$\begin{aligned} -\Delta Q_{k-1}|_{\Omega} &= f_1, \\ (n \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge Q_{k-1}))|_{\partial\Omega} &= f_n, \end{aligned}$$

admite una solución única Q_{k-1} porque la condición de compatibilidad

$$\int_{\Omega} f_1 d\underline{x} = - \int_{\Omega} \Delta Q_{k-1}(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} n(\underline{x}) \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge Q_{k-1})(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} f_n d\underline{x}$$

se satisface. Similarmente, se tiene que el problema de Neumann relacionado a (1.33):

$$\begin{aligned} -\Delta P_{k+1}|_{\Omega} &= f_2, \\ (n \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot P_{k+1}))|_{\partial\Omega} &= f_t, \end{aligned}$$

tiene una única solución.

Para demostrar la unicidad se asume que existen dos descomposiciones ortogonales diferentes $F_k = G_1 + G_2 = \partial_{\underline{x}} \wedge Q_{k-1} + \partial_{\underline{x}} \cdot P_{k+1}$ y $F_k = G'_1 + G'_2 = \partial_{\underline{x}} \wedge Q'_{k-1} + \partial_{\underline{x}} \cdot P'_{k+1}$ tales que $(n \cdot G_2)|_{\partial\Omega} = (n \cdot G'_2)|_{\partial\Omega} = 0$ o $(n \wedge G_1)|_{\partial\Omega} = (n \wedge G'_1)|_{\partial\Omega} = 0$. Es claro que $0 = \partial_{\underline{y}} \wedge (Q_{k-1} - Q'_{k-1}) + G_2 - G'_2$, y por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\int_{\Omega} [(\overline{G_2 - G'_2})(G_2 - G'_2) + (\overline{G_2 - G'_2})(\partial_{\underline{y}} \wedge (Q_{k-1} - Q'_{k-1}))] d\underline{y} \right]_0 \\ &= \langle G_2 - G'_2, G_2 - G'_2 \rangle - \left[\int_{\Omega} [\overline{G_2}(\partial_{\underline{y}} \wedge Q'_{k-1}) + \overline{G'_2}(\partial_{\underline{y}} \wedge Q_{k-1})] d\underline{y} \right]_0 \\ &= \langle G_2 - G'_2, G_2 - G'_2 \rangle - \left[\int_{\Gamma} (\overline{G_2} \cdot n) Q'_{k-1} d\underline{y} - \int_{\Omega} (\overline{G_2} \cdot \partial_{\underline{y}}) Q'_{k-1} d\underline{y} \right]_0 \\ &\quad - \left[\int_{\Gamma} (\overline{G'_2} \cdot n) Q_{k-1} d\underline{y} - \int_{\Omega} (\overline{G'_2} \cdot \partial_{\underline{y}}) Q_{k-1} d\underline{y} \right]_0 \\ &= \langle G_2 - G'_2, G_2 - G'_2 \rangle \end{aligned}$$

o, tomando el producto escalar con $G_1 - G'_1$, se arriba a que

$$\begin{aligned}
 0 &= \left[\int_{\Omega} [(\overline{G_1 - G'_1})(G_1 - G'_1) + (\overline{G_1 - G'_1})(\partial_{\underline{y}} \cdot (P_{k+1} - P'_{k+1}))] d\underline{y} \right]_0 \\
 &= \langle G_1 - G'_1, G_1 - G'_1 \rangle - \left[\int_{\Omega} [\overline{G_1}(\partial_{\underline{y}} \cdot P'_{k+1}) + \overline{G'_1}(\partial_{\underline{y}} \cdot P_{k+1})] d\underline{y} \right]_0 \\
 &= \langle G_1 - G'_1, G_1 - G'_1 \rangle - \left[\int_{\Gamma} (\overline{G_1} \wedge n) P'_{k+1} d\underline{y} - \int_{\Omega} (\overline{G_1} \wedge \partial_{\underline{y}}) P'_{k+1} d\underline{y} \right]_0 \\
 &\quad - \left[\int_{\Gamma} (\overline{G'_1} \wedge n) P_{k+1} d\underline{y} - \int_{\Omega} (\overline{G'_1} \wedge \partial_{\underline{y}}) P_{k+1} d\underline{y} \right]_0 \\
 &= \langle G_1 - G'_1, G_1 - G'_1 \rangle,
 \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. □

1.5. Conjuntos estructurales

Un conjunto estructural es simplemente una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$. El uso de estos en la teoría de funciones hiperholomorfas ha ayudado a visualizar desde un enfoque diferente a muchos problemas de la ciencia. Los trabajos [57, 58, 75] de Gürlebeck y Nguyen recopilan algunas de las tantas aplicaciones de los conjuntos estructurales en la Elasticidad Lineal.

En un contexto más general, sea un conjunto estructural fijo

$$\psi = \{\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^m\}$$

en $\mathbb{R}^m$. Se dice que una función $f \in C^1(\Omega)$ es ψ -monogénica (por la izquierda o por derecha, respectivamente) si esta pertenece a $\ker[\psi \partial_{\underline{x}}(\cdot)]$ o $\ker[(\cdot) \psi \partial_{\underline{x}}]$, donde

$$\psi \partial_{\underline{x}} := \psi^1 \partial_{x_1} + \psi^2 \partial_{x_2} + \dots + \psi^m \partial_{x_m} \quad (1.34)$$

denota al operador de Dirac construido con el conjunto estructural ψ .

Es apreciable que la igualdad

$$\psi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} = -\Delta \quad (1.35)$$

es válida si y solo si

$$\psi^i \psi^j + \psi^j \psi^i = -2\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.36)$$

donde δ_{ij} denota la delta de Kronecker. Note que la relación (1.36) implica que

$$-2\delta_{ij} = \psi^i \psi^j + \psi^j \psi^i = \psi^i \psi^j + \overline{\psi^i \psi^j} = 2[\psi^i \psi^j]_0 = -2\langle \psi^i, \psi^j \rangle_{\mathbb{R}^m}. \quad (1.37)$$

Por ende, la factorización (1.35) se tiene si y solo si ψ representa una base ortonormal de $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}_{0,m}^{(1)}$.

Una función $f \in C^s(\Omega)$ es llamada s - ψ -monogénica (por la izquierda o por la derecha, respectivamente) si esta pertenece a $\ker[(\psi \partial_{\underline{x}})^s(\cdot)]$ o $\ker[(\cdot)(\psi \partial_{\underline{x}})^s]$. Se considerará la notación específica

$$\underline{x}_{\psi} = \sum_{i=1}^m \psi^i x_i$$

para la llamada representación ψ del vector $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. En el caso del conjunto estructural estándar se continuará escribiendo como $\underline{x} = \underline{x}_{\psi_{std}}$. Observe la diferencia crucial entre $\underline{x}$ y, en general, $\underline{x}_{\psi}$. Por ejemplo, si el conjunto ψ es tomado como la siguiente reordenación de la base estándar de $\mathbb{R}^m$

$$\psi = \{e_m, e_{m-1}, \dots, e_2, e_1\}$$

entonces

$$\underline{x}_{\psi} = e_m x_1 + e_{m-1} x_2 + \dots + e_2 x_{m-1} + e_1 x_m,$$

lo cual es bastante distinto de la expresión

$$\underline{x} = e_1 x_1 + e_2 x_2 + \dots + e_{m-1} x_{m-1} + e_m x_m.$$

El uso de notaciones distintas para los conjuntos estructurales es para enfatizar que se asumen, en general, cualesquiera bases arbitrarias diferentes de la estándar.

Dados dos conjuntos estructurales φ y ψ , surgen las siguientes dos ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\varphi \partial_{\underline{x}} f \psi \partial_{\underline{x}} = 0 \quad (1.38)$$

y

$$\varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} f = 0. \quad (1.39)$$

Como se mencionó en la introducción, las soluciones de (1.38) son llamadas funciones (φ, ψ) -inframonogénicas [14]; mientras que las soluciones de (1.39) se nombran funciones

(φ, ψ) -armónicas [84]. Note que cuando ambos conjuntos estructurales son idénticos la ecuación (1.39) se reduce a la de Laplace. Por el Teorema de Regularidad para operadores elípticos estas funciones son infinitamente diferenciables y representan subclases no triviales de las funciones biarmónicas. Algunos resultados característicos para estas funciones pueden consultarse en los artículos recientes [6, 7, 11, 18, 22, 23, 83, 85]. También es importante mencionar que estas clases de funciones ayudan a descomponer aditivamente el vector de desplazamiento del clásico sistema de Lamé-Navier de la Elasticidad Lineal [5, 12, 13, 21].

A partir de ahora, se usarán las notaciones $\mathcal{I}_{\varphi, \psi}(\Omega)$, $\mathcal{H}(\Omega)$ y $\mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\Omega)$ para denotar la clase de funciones (φ, ψ) -inframonogénicas, armónicas y (φ, ψ) -armónicas en Ω , respectivamente. Note que cuando $\varphi = \psi$ la clase $\mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\Omega)$ coincide con $\mathcal{H}(\Omega)$, mientras que si $\varphi = \psi = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, la clase $\mathcal{I}_{\varphi, \psi}(\Omega)$ se convierte en el espacio de funciones inframonogénicas $\mathcal{I}(\Omega)$, introducido en [72] y estudiado extensamente en [49, 50, 51, 52].

Es importante reconocer que una función es inframonogénica o armónica si y solo si todas su partes k -vectoriales lo son también. No obstante, en general, las funciones (φ, ψ) -inframonogénicas y (φ, ψ) -armónicas no cumplen esta propiedad. Véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. Considere los siguientes conjuntos estructurales en $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, -e_3 \right\}$$

y

$$\psi = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}e_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 - \frac{\sqrt{6}}{6}e_3, \frac{\sqrt{3}}{3}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 - \frac{\sqrt{6}}{6}e_3, \frac{\sqrt{3}}{3}e_1 + \frac{\sqrt{6}}{3}e_3 \right\}.$$

La función

$$f(\underline{x}) = \left[\frac{\sqrt{6}}{3}(\|\underline{x}\|^2 - 1) + x_3^2 \right] e_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}(\|\underline{x}\|^2 - 1)e_1e_2e_3 \quad (1.40)$$

es (φ, ψ) -inframonogénica en $\mathbb{R}^3$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} \varphi_{\partial_{\underline{x}}}[f(\underline{x})]_1 \psi_{\partial_{\underline{x}}} &= \frac{2\sqrt{3}}{3}e_1e_2e_3, \\ \varphi_{\partial_{\underline{x}}}[f(\underline{x})]_3 \psi_{\partial_{\underline{x}}} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}e_1e_2e_3. \end{aligned}$$

Al contrario de Δ o $\partial_{\underline{x}}(\cdot)\partial_{\underline{x}}$, el operator $\varphi\partial_{\underline{x}}(\cdot)\psi\partial_{\underline{x}}$ no mantiene invariante el espacio de campos k -vectoriales para todo $k \in \{0, 1, \dots, m\}$. Un ejemplo para las funciones (φ, ψ) -armónicas puede ser encontrado en [84]. Note que la función (1.40) es la única solución del siguiente problema de Dirichlet en la bola unitaria tridimensional $B(0, 1)$:

$$\begin{cases} \varphi\partial_{\underline{x}}f\psi\partial_{\underline{x}} = 0 & \text{en } B(0, 1), \\ f = x_3^2 e_2 & \text{en } \partial B(0, 1). \end{cases} \quad (1.41)$$

Esta solución no representa un campo vectorial aun cuando su restricción a $\partial B(0, 1)$ lo es. El lector puede comprobar computacionalmente estos hechos utilizando las funciones del paquete “InfraDirichletBall” implementado en Wolfram Mathematica y publicado en [52, pág. 516].

Una versión débil de la anterior propiedad puede ser obtenida utilizando las partes par e impar de la función. Una función f es (φ, ψ) -inframonogénica (respectivamente (φ, ψ) -armónica) en Ω si y solo si su parte par

$$f_+ = \sum_{k-\text{par}} [f]_k$$

y su parte impar

$$f_- = \sum_{k-\text{impar}} [f]_k$$

son también funciones (φ, ψ) -inframonogénicas (respectivamente (φ, ψ) -armónicas). El lector puede verificar este resultado en el ejemplo antes presentado. La prueba de esta propiedad se debe a las relaciones de conmutación siguientes:

$$[\varphi\partial_{\underline{x}}f\psi\partial_{\underline{x}}]_{\pm} = \varphi\partial_{\underline{x}}f_{\pm}\psi\partial_{\underline{x}}, \quad [\varphi\partial_{\underline{x}}\psi\partial_{\underline{x}}f]_{\pm} = \varphi\partial_{\underline{x}}\psi\partial_{\underline{x}}[f_{\pm}].$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \varphi\partial_{\underline{x}} \cdot F_k &= \frac{1}{2} [\varphi\partial_{\underline{x}}F_k - (-1)^k F_k \varphi\partial_{\underline{x}}] = [\varphi\partial_{\underline{x}}F_k]_{k-1}, \\ \varphi\partial_{\underline{x}} \wedge F_k &= \frac{1}{2} [\varphi\partial_{\underline{x}}F_k + (-1)^k F_k \varphi\partial_{\underline{x}}] = [\varphi\partial_{\underline{x}}F_k]_{k+1}, \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \varphi\partial_{\underline{x}}F_k\psi\partial_{\underline{x}} &= (-1)^k \underbrace{(\varphi\partial_{\underline{x}} \cdot \psi\partial_{\underline{x}} \wedge F_k - \varphi\partial_{\underline{x}} \wedge \psi\partial_{\underline{x}} \cdot F_k)}_{k-\text{vector}} - \underbrace{\varphi\partial_{\underline{x}} \cdot \psi\partial_{\underline{x}} \cdot F_k}_{(k-2)-\text{vector}} + \underbrace{\varphi\partial_{\underline{x}} \wedge \psi\partial_{\underline{x}} \wedge F_k}_{(k+2)-\text{vector}}, \\ \varphi\partial_{\underline{x}}\psi\partial_{\underline{x}}F_k &= \underbrace{\varphi\partial_{\underline{x}} \cdot \psi\partial_{\underline{x}} \wedge F_k + \varphi\partial_{\underline{x}} \wedge \psi\partial_{\underline{x}} \cdot F_k}_{k-\text{vector}} + \underbrace{\varphi\partial_{\underline{x}} \cdot \psi\partial_{\underline{x}} \cdot F_k}_{(k-2)-\text{vector}} + \underbrace{\varphi\partial_{\underline{x}} \wedge \psi\partial_{\underline{x}} \wedge F_k}_{(k+2)-\text{vector}}. \end{aligned}$$

En particular, para campos k -vectoriales (φ, ψ) -inframonogénicos y (φ, ψ) -armónicos se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi \partial_{\underline{x}} F_k \psi \partial_{\underline{x}} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \partial_{\underline{x}} \cdot \psi \partial_{\underline{x}} \cdot F_k &= 0, \\ \varphi \partial_{\underline{x}} \cdot \psi \partial_{\underline{x}} \wedge F_k - \varphi \partial_{\underline{x}} \wedge \psi \partial_{\underline{x}} \cdot F_k &= 0, \\ \varphi \partial_{\underline{x}} \wedge \psi \partial_{\underline{x}} \wedge F_k &= 0, \end{cases} \\ \varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} F_k = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \partial_{\underline{x}} \cdot \psi \partial_{\underline{x}} \cdot F_k &= 0, \\ \varphi \partial_{\underline{x}} \cdot \psi \partial_{\underline{x}} \wedge F_k + \varphi \partial_{\underline{x}} \wedge \psi \partial_{\underline{x}} \cdot F_k &= 0, \\ \varphi \partial_{\underline{x}} \wedge \psi \partial_{\underline{x}} \wedge F_k &= 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La consideración de dos colecciones de conjuntos estructurales

$$\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}$$

y

$$\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_q\}$$

permite introducir una nueva clase de funciones. Se dice que f es (Φ, Ψ) -infrapolimonogénica en Ω si

$$\varphi_1 \partial_{\underline{x}} \dots \varphi_p \partial_{\underline{x}} f \psi_1 \partial_{\underline{x}} \dots \psi_q \partial_{\underline{x}} = 0$$

en Ω . Mediante estas funciones también se obtendrán descomposiciones de Fischer en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Descomposición de Fischer

En este capítulo se presenta una primera parte de los resultados principales de la investigación. En la sección 2.1 se introducen algunas de las más conocidas descomposiciones de Fischer, se define el producto de Fischer y se obtienen relaciones de importancia con este. Posteriormente, en la sección 2.2 se arriba a descomposiciones de Fischer mediante funciones (φ, ψ) -inframonomogénicas y (Φ, Ψ) -infrapolimonogénicas. Los resultados previos son extendidos a un contexto del Análisis de Clifford fraccionario en la sección 2.3. Para concluir, la sección 2.4 presenta la descomposición de Fischer mediante funciones (φ, ψ) -armónicas y se abordan casos particulares con respecto a la ortogonalidad de los polinomios en las subsecciones 2.4.1 y 2.4.2.

2.1. Producto de Fischer

En 1917, el matemático vienés Ernst Fischer demostró que, dado un polinomio homogéneo $q(\underline{x})$, con $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$, todo polinomio homogéneo $P_k(\underline{x})$ de grado k admite una descomposición única de la forma

$$P_k(\underline{x}) = Q_k(\underline{x}) + q(\underline{x})R(\underline{x}),$$

donde $Q_k(\underline{x})$ es un polinomio homogéneo de grado k que satisface la ecuación

$$q(\partial)Q_k(\underline{x}) = 0,$$

mientras que $R(\underline{x})$ es un polinomio homogéneo de grado apropiado. Este resultado, conocido como el teorema de descomposición de Fischer, constituye una herramienta fundamental en el estudio de espacios de polinomios y sus generalizaciones [45]. Aquí $q(\underline{\partial})$ es el operador diferencial que se tiene al reemplazar en el polinomio q cada variable x_j por la correspondiente derivada parcial ∂_{x_j} (identificación de Fourier). La clásica descomposición de Fischer que surge cuando se considera $q(\underline{x}) = \|\underline{x}\|^2$ provee una descomposición para polinomios homogéneos arbitrarios de $\mathbb{R}^m$ en términos de polinomios homogéneos armónicos. Cuando $q(\underline{x}) = \|\underline{x}\|^2$ entonces $q(\underline{\partial}) = \Delta$ y $Q_k(\underline{x})$ es armónico, obteniendo así la descomposición de Fischer completa

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{p=0}^{\infty} r^{2p} \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}) \quad (2.1)$$

del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$ de polinomios complejos de $\mathbb{R}^m$ en los espacios $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$ de polinomios complejos armónicos y homogéneos de grado k . A partir de este momento, se utilizará la terminología “polinomio k -homogéneo” para referirse a los polinomios homogéneos de grado k . Estas descomposiciones en términos de armónicos esféricos representan una técnica fundamental que se aplica en muchos problemas de la ciencia [33, 34, 39, 90].

El Análisis de Clifford permite encontrar un refinamiento a la descomposición (2.1) a través de las funciones monogénicas. Si se toma $q(\underline{x}) = \underline{x}$ entonces $q(\underline{\partial}) = \underline{\partial}$ y Q_k sería un polinomio monogénico k -homogéneo, esto conduce a la descomposición de Fischer:

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}_{0,m}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{p=0}^{\infty} \underline{x}^p \mathcal{M}(k), \quad (2.2)$$

donde $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m})$ denota el espacio de polinomios sobre $\mathbb{R}^m$ que toman valores en $\mathbb{R}_{0,m}$ y $\mathcal{M}(k)$ es el espacio de polinomios monogénicos por la izquierda k -homogéneos. En particular, cada polinomio armónico k -homogéneo H_k puede ser descompuesto como

$$H_k = M_k + \underline{x} M_{k-1},$$

siendo M_k y M_{k-1} polinomios monogénicos homogéneos del grado indicado. La descomposición de Fischer, junto con la extensión de Cauchy-Kovalevskaya, son unos de los ingredientes esenciales para la construcción de bases ortonormales del espacio de polinomios monogénicos homogéneos [32].

Como se mencionó en la introducción, en [72] se obtuvo la descomposición de Fischer

$$\mathcal{P}(k) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \underline{x}^s \mathcal{I}(k-2s) \underline{x}^s, \quad (2.3)$$

para el espacio de polinomios k -homogéneos $\mathcal{P}(k)$ a través de los espacios de polinomios inframonogénicos k -homogéneos $\mathcal{I}(k)$. Note la diferencia sustancial con la más conocida descomposición de Fischer armónica:

$$\mathcal{P}(k) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \underline{x}^{2s} \mathcal{H}(k-2s), \quad (2.4)$$

donde $\mathcal{H}(k)$ denota el espacio de los polinomios armónicos k -homogéneos.

Para encontrar una descomposición de Fischer por polinomios (φ, ψ) inframonogénicos es imprescindible definir adecuadamente un producto escalar sobre $\mathbb{R}^m[x]$. En este trabajo se considerará el siguiente producto de Fischer:

$$\langle P_k, Q_k \rangle = [\overline{P_k(\partial)} Q_k]_0, \quad P_k, Q_k \in \mathcal{P}(k). \quad (2.5)$$

Sean φ y ψ dos conjuntos estructurales arbitrarios. Para cálculos posteriores, es útil observar que

$$\begin{aligned} \langle \underline{x}_\varphi P_{k-1}, Q_k \rangle &= [\overline{\varphi \partial_\varphi P_{k-1}(\partial)} Q_k]_0 = -[\overline{P_{k-1}(\partial)} \varphi \partial_\varphi Q_k]_0 = -\langle P_{k-1}, \varphi \partial_\varphi Q_k \rangle, \\ \langle P_{k-1} \underline{x}_\psi, Q_k \rangle &= [\overline{P_{k-1}(\partial)} \psi \partial_\psi Q_k]_0 = -[\overline{P_{k-1}(\partial)} Q_k \psi \partial_\psi]_0 = -\langle P_{k-1}, Q_k \psi \partial_\psi \rangle, \end{aligned}$$

con $P_{k-1} \in \mathcal{P}(k-1)$ y $Q_k \in \mathcal{P}(k)$.

Similarmente, si $P_{k-2} \in \mathcal{P}(k-2)$ y $Q_k \in \mathcal{P}(k)$ son dados, se tiene

$$\langle \underline{x}_\varphi P_{k-2} \underline{x}_\psi, Q_k \rangle = -\langle P_{k-2} \underline{x}_\psi, \varphi \partial_\varphi Q_k \rangle = \langle P_{k-2}, \varphi \partial_\varphi Q_k \psi \partial_\psi \rangle, \quad (2.6)$$

$$\langle \underline{x}_\psi \underline{x}_\varphi P_{k-2}, Q_k \rangle = -\langle \underline{x}_\varphi P_{k-2}, \psi \partial_\psi Q_k \rangle = \langle P_{k-2}, \varphi \partial_\varphi \psi \partial_\psi Q_k \rangle. \quad (2.7)$$

Las fórmulas (2.6) y (2.7) serán útiles en la siguiente sección.

2.2. Descomposición de Fischer por funciones (φ, ψ) -inframonomogénicas

Sea $\mathcal{J}_{\varphi, \psi}(k) \subset \mathcal{P}(k)$ el espacio de todos los polinomios (φ, ψ) -inframonomogénicos k -homogéneos en $\mathbb{R}^m$ y que toman valores sobre $\mathbb{R}_{0,m}$. Se está en la posición de enunciar y demostrar el siguiente teorema.

Teorema 9 (Descomposición de Fischer (φ, ψ) -inframonomogénica). *Sea $k \geq 2$, la siguiente descomposición se satisface:*

$$\mathcal{P}(k) = \mathcal{J}_{\varphi, \psi}(k) \oplus \underline{x}_{\varphi} \mathcal{P}(k-2) \underline{x}_{\psi}.$$

Además, los subespacios $\mathcal{J}_{\varphi, \psi}(k)$ y $\underline{x}_{\varphi} \mathcal{P}(k-2) \underline{x}_{\psi}$ son ortogonales con respecto al producto de Fischer (2.5).

Demostración:

Gran parte de la prueba es similar a la dada en la literatura para la base estándar (ver por ejemplo [39, 72]), y por lo tanto se omitirán ciertos detalles.

Como $\mathcal{P}(k) = \underline{x}_{\varphi} \mathcal{P}(k-2) \underline{x}_{\psi} \oplus (\underline{x}_{\varphi} \mathcal{P}(k-2) \underline{x}_{\psi})^{\perp}$, solo bastaría probar que

$$\mathcal{J}_{\varphi, \psi}(k) = (\underline{x}_{\varphi} \mathcal{P}(k-2) \underline{x}_{\psi})^{\perp}.$$

En efecto, sea $P_k \in (\underline{x}_{\varphi} \mathcal{P}(k-2) \underline{x}_{\psi})^{\perp}$. Entonces para cualquier $Q_{k-2} \in \mathcal{P}(k-2)$ se tiene que

$$\langle \underline{x}_{\varphi} Q_{k-2} \underline{x}_{\psi}, P_k \rangle = \langle Q_{k-2}, {}^{\varphi}\partial_{\underline{x}} P_k {}^{\psi}\partial_{\underline{x}} \rangle = 0,$$

donde se hace uso de la relación (2.6).

En particular, para $Q_{k-2} = {}^{\varphi}\partial_{\underline{x}} P_k {}^{\psi}\partial_{\underline{x}}$, se obtiene que ${}^{\varphi}\partial_{\underline{x}} P_k {}^{\psi}\partial_{\underline{x}} = 0$ y por ende $P_k \in \mathcal{J}_{\varphi, \psi}(k)$.

Por consiguiente,

$$(\underline{x}_{\varphi} \mathcal{P}(k-2) \underline{x}_{\psi})^{\perp} \subset \mathcal{J}_{\varphi, \psi}(k).$$

Ahora sea $P_k \in \mathcal{J}_{\varphi, \psi}(k)$. Entonces, por (2.6), para cualquier $Q_{k-2} \in \mathcal{P}(k-2)$ se tiene también que

$$\langle \underline{x}_{\varphi} Q_{k-2} \underline{x}_{\psi}, P_k \rangle = \langle Q_{k-2}, {}^{\varphi}\partial_{\underline{x}} P_k {}^{\psi}\partial_{\underline{x}} \rangle = 0,$$

y por tanto $P_k \in (\underline{x}_\varphi \mathcal{P}(k-2) \underline{x}_\psi)^\perp$.

Como consecuencia se deduce que $\mathcal{J}_{\varphi, \psi}(k) \subset (\underline{x}_\varphi \mathcal{P}(k-2) \underline{x}_\psi)^\perp$ y finalmente

$$\mathcal{J}_{\varphi, \psi}(k) = (\underline{x}_\varphi \mathcal{P}(k-2) \underline{x}_\psi)^\perp.$$

□

El siguiente resultado es una consecuencia de Teorema 9.

Teorema 10 (Descomposición completa de Fischer (φ, ψ) -inframonogénica). *Sea $k \geq 2$, la siguiente descomposición se tiene:*

$$\mathcal{P}(k) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \underline{x}_\varphi^s \mathcal{J}_{\varphi, \psi}(k-2s) \underline{x}_\psi^s.$$

Sean dos colecciones de conjuntos estructurales $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}$ y $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_q\}$. Cálculos muy parecidos a los que establecen (2.6) y (2.7) dan como resultado:

$$\begin{aligned} \langle \underline{x}_{\varphi_p} \cdots \underline{x}_{\varphi_1} P_{k-p-q} \underline{x}_{\psi_q} \cdots \underline{x}_{\psi_1}, Q_k \rangle &= (-1)^{p+q} \langle P_{k-p-q}, {}^{\varphi_1} \partial_{\underline{x}} \cdots {}^{\varphi_p} \partial_{\underline{x}} Q_k {}^{\psi_1} \partial_{\underline{x}} \cdots {}^{\psi_q} \partial_{\underline{x}} \rangle, \\ \langle \underline{x}_{\varphi_p} \cdots \underline{x}_{\varphi_1} P_{k-p}, Q_k \rangle &= (-1)^p \langle P_{k-p}, {}^{\varphi_1} \partial_{\underline{x}} \cdots {}^{\varphi_p} \partial_{\underline{x}} Q_k \rangle. \end{aligned}$$

Se denota el subespacio de $\mathcal{P}(k)$ que contiene a los polinomios (Φ, Ψ) -infrapolimonogénicos k -homogéneos con la simbología $\mathcal{J}_{\Phi, \Psi}(k)$. Teniendo en cuenta las relaciones anteriores se arriba a las siguientes generalizaciones de los Teoremas 9 y 10.

Teorema 11 (Descomposición de Fischer (Φ, Ψ) -infrapolimonogénica). *Sea $k \geq p + q$, la siguiente descomposición se evidencia:*

$$\mathcal{P}(k) = \mathcal{J}_{\Phi, \Psi}(k) \oplus \underline{x}_{\varphi_p} \cdots \underline{x}_{\varphi_1} \mathcal{P}(k-p-q) \underline{x}_{\psi_q} \cdots \underline{x}_{\psi_1}.$$

Además, los subespacios $\mathcal{J}_{\Phi, \Psi}(k)$ y $\underline{x}_{\varphi_p} \cdots \underline{x}_{\varphi_1} \mathcal{P}(k-p-q) \underline{x}_{\psi_q} \cdots \underline{x}_{\psi_1}$ son ortogonales con respecto al producto de Fischer (2.5).

Para la demostración se puede aplicar un razonamiento análogo al realizado anteriormente en la demostración del Teorema 9. Similarmente, se tiene la siguiente descomposición completa:

Teorema 12 (Descomposición completa de Fischer (Φ, Ψ) -infrapolimonogénica). *Sea $k \geq p + q$, la siguiente descomposición es válida:*

$$\mathcal{P}(k) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor k/(p+q) \rfloor} (\underline{x}_{\varphi_p} \cdots \underline{x}_{\varphi_1})^s \mathcal{J}_{\Phi, \Psi}(k - ps - qs) (\underline{x}_{\psi_q} \cdots \underline{x}_{\psi_1})^s.$$

Observación 1. *El uso de conjuntos estructurales arbitrarios ofrece la posibilidad de una elección más amplia de descomposiciones tipo Fischer para polinomios en $\mathbb{R}^m$ por soluciones de EDP que surgen en el Análisis de Clifford. En la siguiente sección se aportan nuevas perspectivas a estas descomposiciones suponiendo operadores de Dirac fraccionarios.*

2.3. Descomposición fraccionaria de Fischer

Esta sección extiende los resultados anteriores al contexto del Cálculo Fraccionario. Para ello se considerarán funciones definidas en $\mathbb{C}^m$ con valores en el álgebra de Clifford complejizada $\mathbb{C}_m$. Como es usual, $\mathbb{C}_m$ es introducida por medio del producto tensorial $\mathbb{C}_m := \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{0,m}$, donde la unidad imaginaria $i \in \mathbb{C}$ conmuta con los elementos de la base e_j , $j = 1, \dots, m$.

La conjugación en $\mathbb{C}_m$ es definida como el automorfismo

$$w \mapsto \bar{w} := \sum_A (w_A)^c \bar{e}_A,$$

donde $(w_A)^c$ denota el complejo conjugado usual de $w_A \in \mathbb{C}$.

Sea $\varphi := \{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m\}$ un conjunto estructural arbitrario, $0 < \alpha \leq 1$, y se introducen los vectores fraccionarios

$$\underline{x}_\varphi^\alpha = \sum_{j=1}^m \varphi^j x_j^\alpha \in \mathbb{C}^m$$

con

$$x_j^\alpha = \begin{cases} \exp(\alpha \log |x_j|); & x_j > 0, \\ 0; & x_j = 0, \\ \exp(\alpha \log |x_j| + i\alpha\pi); & x_j < 0. \end{cases}$$

Siguiendo las ideas de [64] se define el operador de Dirac fraccionario

$$\varphi_{\partial_{\underline{x}}}^\alpha = \sum_{j=1}^m \varphi^j \partial_j^\alpha,$$

donde ${}^C_+\partial_j^\alpha$ denota la derivada de Caputo con respecto a x_j^α :

$$({}^C_+\partial_j^\alpha f)(x^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{x_j^\alpha} \frac{1}{(x_j^\alpha - t)^\alpha} f'_t(x_1^\alpha, \dots, x_{j-1}^\alpha, t, x_{j+1}^\alpha, \dots, x_m^\alpha) dt.$$

Partiendo de las relaciones de conmutación de Weyl:

$$[{}^C_+\partial_j^\alpha, x_j^\alpha] := {}^C_+\partial_j^\alpha x_j^\alpha - x_j^\alpha {}^C_+\partial_j^\alpha = K_\alpha,$$

con $K_\alpha := \alpha\Gamma(\alpha)$, se pueden obtener las identidades

$$\begin{aligned} \{\varphi\partial_{\underline{x}}^\alpha, \underline{x}_\varphi^\alpha\} &:= \varphi\partial_{\underline{x}}^\alpha \underline{x}_\varphi^\alpha + \underline{x}_\varphi^\alpha \varphi\partial_{\underline{x}}^\alpha = -2\mathbb{E}^\alpha - K_\alpha m, \\ [\underline{x}_\varphi^\alpha, \varphi\partial_{\underline{x}}^\alpha] &= -2\Gamma_\varphi^\alpha + K_\alpha m, \\ [\underline{x}_\varphi^\alpha, \mathbb{E}^\alpha] &= -K_\alpha \underline{x}_\varphi^\alpha, \\ [\varphi\partial_{\underline{x}}^\alpha, \mathbb{E}^\alpha] &= K_\alpha \varphi\partial_{\underline{x}}^\alpha, \end{aligned}$$

donde

$$\mathbb{E}^\alpha = \sum_{i=1}^m x_i^\alpha {}^C_+\partial_i^\alpha$$

y

$$\Gamma_\varphi^\alpha = - \sum_{i < j} \varphi^i \varphi^j (x_i^\alpha {}^C_+\partial_j^\alpha - {}^C_+\partial_i^\alpha x_j^\alpha)$$

son los operadores fraccionarios de Euler y Gamma, respectivamente.

Es importante notar que para cualesquiera conjuntos estructurales φ y ψ , el operador

$$\Delta^{2\alpha} := -\varphi\partial_{\underline{x}}^\alpha \varphi\partial_{\underline{x}}^\alpha = -\psi\partial_{\underline{x}}^\alpha \psi\partial_{\underline{x}}^\alpha,$$

se comporta como un operador complejo y conmuta con cualquier polinomio (ver [26]). Referencias recomendables para este t3pico son los libros [65, 67, 82].

An3logamente a las relaciones (3.5), establecidas en [64], se pueden obtener estas f3rmulas con respecto a un conjunto estructural arbitrario φ . Estas relaciones muestran que se tiene una super3lgebra de Lie de dimensi3n finita generada por $\underline{x}_\varphi^\alpha$ y $\varphi\partial_{\underline{x}}^\alpha$, isomorfa a $\mathfrak{osp}(1|2)$.

La super3lgebra de Lie $\mathfrak{osp}(1|2)$ es una extensi3n gradual del 3lgebra de Lie $sl(2)$ (matrices reales de 2×2 con traza nula y con el corchete de Lie dado por el conmutador,

las cuales se asocian al grupo especial lineal $SL(2)$ de matrices con determinante igual a 1). Esta superálgebra puede considerarse la más simple y puede ser vista como la versión supersimétrica de $sl(2)$ [46]. La versión afín de $\mathfrak{osp}(1|2)$ está directamente relacionada con los modelos minimales superconformes por el procedimiento de reducción hamiltoniana, también aparece en la cuantización de la supergravedad en dos dimensiones y en su versión topológica. Algunos de los modelos que surgen de esta superálgebra están ligados a las supercuerdas no-críticas de Ramond-Neveu-Schwarz con tan solo poner un ejemplo [4, 35, 61]. La superálgebra $\mathfrak{osp}(1|2)$ contiene tres generadores bosónicos o pares E^+, E^-, H (transforman estados bosónicos en estados bosónicos y estados fermiónicos en estados fermiónicos) y dos generadores fermiónicos o impares F^+, F^- (transforman estados bosónicos en estados fermiónicos y viceversa), cuyas relaciones de conmutación no nulas en la base de Cartan-Weyl se expresan como:

$$\begin{aligned} [H, E^\pm] &= \pm E^\pm, & [E^+, E^-] &= 2H, \\ [H, F^\pm] &= \pm \frac{1}{2} F^\pm, & \{F^+, F^-\} &= \frac{1}{2} H, \\ [E^\pm, F^\mp] &= -F^\pm, & \{F^\pm, F^\pm\} &= \pm \frac{1}{2} E^\pm. \end{aligned}$$

La relación nula sería

$$[E^\pm, F^\pm] = 0.$$

En efecto, la renormalización

$$\begin{aligned} H^\alpha &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{E}^\alpha + \frac{K_\alpha m}{2} \right), & (E^\alpha)^+ &= \frac{1}{2} K_\alpha \|x_\varphi^\alpha\|^2, \\ (E^\alpha)^- &= -\frac{1}{2} K_\alpha \Delta^{2\alpha}, & (F^\alpha)^+ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} i K_\alpha x_\varphi^\alpha, \\ (F^\alpha)^- &= \frac{1}{2\sqrt{2}} i K_\alpha \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha, \end{aligned}$$

conduce a las relaciones de conmutación estándar para $\mathfrak{osp}(1|2)$.

Denótese por $\Pi_\alpha(l)$ el espacio de polinomios fraccionarios l -homogéneos P_l , los cuales por definición tienen que satisfacer lo siguiente:

$$\mathbb{E}^\alpha P_l = K_\alpha l P_l.$$

Si $P_l \in \Pi_\alpha(l)$, entonces se tiene $\underline{x}_\varphi^\alpha \mathbb{E}^\alpha P_l - \mathbb{E}^\alpha \underline{x}_\varphi^\alpha P_l = -K_\alpha \underline{x}_\varphi^\alpha P_l$, y por consiguiente

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^\alpha \underline{x}_\varphi^\alpha P_l &= \underline{x}_\varphi^\alpha \mathbb{E}^\alpha P_l + K_\alpha \underline{x}_\varphi^\alpha P_l \\ &= (K_\alpha l + K_\alpha) \underline{x}_\varphi^\alpha P_l \\ &= K_\alpha (l + 1) \underline{x}_\varphi^\alpha P_l,\end{aligned}$$

lo cual significa que $\underline{x}_\varphi^\alpha P_l \in \Pi_\alpha(l + 1)$.

Por otra parte, se tiene también que $\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha \mathbb{E}^\alpha P_l - \mathbb{E}^\alpha \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha P_l = K_\alpha \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha P_l$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^\alpha \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha P_l &= \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha K_\alpha l P_l - K_\alpha \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha P_l \\ &= (K_\alpha l - K_\alpha) \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha P_l \\ &= K_\alpha (l - 1) \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha P_l,\end{aligned}$$

concretamente $\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha P_l \in \Pi_\alpha(l - 1)$.

Sean P_{l-2} , P_{l-1} y Q_l tres polinomios fraccionarios homogéneos de grados $l - 2$, $l - 1$ y l , respectivamente. A continuación, es sencillo comprobar que

$$\begin{aligned}\langle \underline{x}_\varphi^\alpha P_{l-1}, Q_l \rangle &= -\langle P_{l-1}, \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha Q_l \rangle, \\ \langle P_{l-1} \underline{x}_\psi^\alpha, Q_l \rangle &= -\langle P_{l-1}, Q_l \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha \rangle,\end{aligned}$$

y por ende

$$\begin{aligned}\langle \underline{x}_\varphi^\alpha P_{l-2} \underline{x}_\psi^\alpha, Q_l \rangle &= \langle P_{l-2}, \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha Q_l \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha \rangle, \\ \langle \underline{x}_\psi^\alpha \underline{x}_\varphi^\alpha P_{l-2}, Q_l \rangle &= \langle P_{l-2}, \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha Q_l \rangle,\end{aligned}$$

donde

$$\langle P_l, Q_l \rangle = [\overline{P_l (\overset{C}{+} \partial^\alpha)} Q_l]_0, \quad P_l, Q_l \in \Pi_\alpha(l), \quad (2.8)$$

es un producto escalar de Fischer entre dos polinomios fraccionarios homogéneos y $P_l (\overset{C}{+} \partial^\alpha)$ denota el operador diferencial obtenido al sustituir en el polinomio P_l cada variable x_j por la correspondiente derivada de Caputo $\overset{C}{+} \partial_j^\alpha$. Ahora, se necesitan algunas otras notaciones. Se denotará por $\mathcal{J}_{\varphi, \psi}^\alpha(l)$ al subespacio cerrado de $\Pi_\alpha(l)$ que contiene a los polinomios fraccionarios (φ, ψ) -inframonogénicos P_l , o sea, tal que $P_l \in \Pi_\alpha(l)$ satisface $\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha P_l \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha = 0$.

Se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 13 (Descomposición fraccionaria de Fischer (φ, ψ) -inframonogénica). *Para $l \geq 2$ la siguiente descomposición se satisface:*

$$\Pi_\alpha(l) = \mathcal{J}_{\varphi, \psi}^\alpha(l) \oplus \underline{x}_\varphi^\alpha \Pi_\alpha(l-2) \underline{x}_\psi^\alpha. \quad (2.9)$$

Además, los subespacios $\mathcal{J}_{\varphi, \psi}^\alpha(l)$ y $\underline{x}_\varphi^\alpha \Pi_\alpha(l-2) \underline{x}_\psi^\alpha$ son ortogonales con respecto al producto (2.8).

Demostración:

Como $\Pi_\alpha(l) = \underline{x}_\varphi^\alpha \Pi_\alpha(l-2) \underline{x}_\psi^\alpha \oplus (\underline{x}_\varphi^\alpha \Pi_\alpha(l-2) \underline{x}_\psi^\alpha)^\perp$, es suficiente mostrar que

$$\mathcal{J}_{\varphi, \psi}^\alpha(l) = (\underline{x}_\varphi^\alpha \Pi_\alpha(l-2) \underline{x}_\psi^\alpha)^\perp.$$

Sea $P_l \in (\underline{x}_\varphi^\alpha \Pi_\alpha(l-2) \underline{x}_\psi^\alpha)^\perp$. Para cualquier polinomio $Q_{l-2} \in \Pi_\alpha(l-2)$ se tiene que

$$\langle \underline{x}_\varphi^\alpha Q_{l-2} \underline{x}_\psi^\alpha, P_l \rangle = \langle Q_{l-2}, \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha P_l \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha \rangle = 0,$$

entonces en particular para $Q_{l-2} = \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha P_l \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha$ se obtiene $\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha P_l \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha = 0$, y por tanto,

$$(\underline{x}_\varphi^\alpha \Pi_\alpha(l-2) \underline{x}_\psi^\alpha)^\perp \subset \mathcal{J}_{\varphi, \psi}^\alpha(l).$$

Ahora, si $P_l \in \mathcal{J}_{\varphi, \psi}^\alpha(l)$ entonces se arriba a que

$$\langle \underline{x}_\varphi^\alpha Q_{l-2} \underline{x}_\psi^\alpha, P_l \rangle = \langle Q_{l-2}, \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha P_l \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha \rangle = 0,$$

para cualquier polinomio $Q_{l-2} \in \Pi_\alpha(l-2)$.

Por consiguiente, $P_l \in (\underline{x}_\varphi^\alpha \Pi_\alpha(l-2) \underline{x}_\psi^\alpha)^\perp$, lo que termina probando que

$$\mathcal{J}_{\varphi, \psi}^\alpha(l) = (\underline{x}_\varphi^\alpha \Pi_\alpha(l-2) \underline{x}_\psi^\alpha)^\perp.$$

□

Una consecuencia directa del teorema previo es la siguiente descomposición completa:

Teorema 14 (Descomposición fraccionaria completa de Fischer (φ, ψ) -inframonogénica). *Para $l \geq 2$ la siguiente descomposición es válida:*

$$\Pi_\alpha(l) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} (\underline{x}_\varphi^\alpha)^s \mathcal{J}_{\varphi, \psi}^\alpha(l-2s) (\underline{x}_\psi^\alpha)^s.$$

Observación 2. En el caso límite $\alpha = 1$ los resultados anteriores adquieren las formas simples expresadas en términos de los Teoremas 9, 10.

El Teorema 14 establece que para todo polinomio fraccionario l -homogéneo P_l existen únicamente polinomios fraccionarios homogéneos (φ, ψ) -inframonogénicos I_j de grados $j = l - 2\lfloor l/2 \rfloor, \dots, l$, tales que

$$P_l = I_l + \underline{x}_\varphi^\alpha I_{l-2} \underline{x}_\psi^\alpha + (\underline{x}_\varphi^\alpha)^2 I_{l-4} (\underline{x}_\psi^\alpha)^2 + \dots + (\underline{x}_\varphi^\alpha)^{\lfloor l/2 \rfloor} I_{l-2\lfloor l/2 \rfloor} (\underline{x}_\psi^\alpha)^{\lfloor l/2 \rfloor}. \quad (2.10)$$

A continuación, se discutirá si los polinomios representados en (2.10) son ortogonales entre sí con respecto al producto escalar de Fischer. A diferencia de la descomposición armónica o monogénica más tradicional, se demostrará que en el presente caso esta condición no se aplica a todos los polinomios. Sin embargo, se caracterizan aquellos polinomios mutuamente ortogonales que aparecen en (2.10).

Para ello, se comenzará con una sencilla generalización de [64, Teorema 3.5].

Teorema 15. Sea $P_l \in \Pi_\alpha(l)$ y sea s un número entero positivo, se tiene que

$$\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [(\underline{x}_\varphi^\alpha)^s P_l] = g_{s,l} (\underline{x}_\varphi^\alpha)^{s-1} P_l + (-1)^s (\underline{x}_\varphi^\alpha)^s (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha P_l), \quad (2.11)$$

donde $g_{2k,l} = -2kK_\alpha$ y $g_{2k+1,l} = -(2k + 2l + m)K_\alpha$.

Demostración:

Un cálculo directo da como resultado:

$$\begin{aligned} \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [(\underline{x}_\varphi^\alpha)^s P_l] &= -2\mathbb{E}^\alpha (\underline{x}_\varphi^\alpha)^{s-1} P_l - K_\alpha m (\underline{x}_\varphi^\alpha)^{s-1} P_l - \underline{x}_\varphi^\alpha \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [(\underline{x}_\varphi^\alpha)^{s-1} P_l] \\ &= (-2K_\alpha(s + l - 1) - K_\alpha m) (\underline{x}_\varphi^\alpha)^{s-1} P_l - \underline{x}_\varphi^\alpha (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha (\underline{x}_\varphi^\alpha)^{s-1} P_l) \\ &= [-2(K_\alpha l + (s - 1)K_\alpha) - K_\alpha m] (\underline{x}_\varphi^\alpha)^{s-1} P_l - \underline{x}_\varphi^\alpha (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha (\underline{x}_\varphi^\alpha)^{s-1} P_l) \\ &= g_{s,l} (\underline{x}_\varphi^\alpha)^{s-1} P_l + (-1)^s (\underline{x}_\varphi^\alpha)^s (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha P_l). \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema responde a la pregunta anterior.

Teorema 16. Sea $l \geq 2$ y $P_l \in \Pi_\alpha(l)$. Entonces el polinomio (φ, ψ) -inframonogénico I_l es ortogonal a todos los polinomios en (2.10) de la forma $(\underline{x}_\varphi^\alpha)^p I_{l-2p} (\underline{x}_\psi^\alpha)^p$, $p > 0$. Además, si $0 < p, q \leq \lfloor l/2 \rfloor$ con $|p-q| \geq 2$, entonces los polinomios $(\underline{x}_\varphi^\alpha)^p I_{l-2p} (\underline{x}_\psi^\alpha)^p$ y $(\underline{x}_\varphi^\alpha)^q I_{l-2q} (\underline{x}_\psi^\alpha)^q$ son ortogonales también.

Demostración:

La aplicación sucesiva de (2.11) muestra que para $s \leq \lfloor l/2 \rfloor$:

$$(\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^s [(\underline{x}_\varphi^\alpha)^s I_{l-2s}] = \varrho_s I_{l-2s} + \cdots + \varrho_{s-k} (\underline{x}_\varphi^\alpha)^k (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^k I_{l-2s} + \cdots + \varrho_0 (\underline{x}_\varphi^\alpha)^s (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^s I_{l-2s},$$

donde ϱ_j son constantes reales que no dependen de $\underline{x}_\varphi^\alpha$.

Tras aplicar una versión por la derecha de la fórmula anterior, se tiene

$$\begin{aligned} & (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^s [(\underline{x}_\varphi^\alpha)^s I_{l-2s} (\underline{x}_\psi^\alpha)^s] (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^s \\ &= \varrho_s [\varrho_s I_{l-2s} + \cdots + \varrho_{s-k} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^k (\underline{x}_\psi^\alpha)^k + \cdots + \varrho_0 I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^s (\underline{x}_\psi^\alpha)^s] \\ &+ \varrho_{s-1} (\underline{x}_\varphi^\alpha)^{\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha} [\varrho_s I_{l-2s} + \cdots + \varrho_{s-k} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^k (\underline{x}_\psi^\alpha)^k + \cdots + \varrho_0 I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^s (\underline{x}_\psi^\alpha)^s] \\ &\vdots \\ &+ \varrho_{s-k} (\underline{x}_\varphi^\alpha)^k (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^k [\varrho_s I_{l-2s} + \cdots + \varrho_{s-k} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^k (\underline{x}_\psi^\alpha)^k + \cdots + \varrho_0 I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^s (\underline{x}_\psi^\alpha)^s] \\ &\vdots \\ &+ \varrho_0 (\underline{x}_\varphi^\alpha)^s (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^s [\varrho_s I_{l-2s} + \cdots + \varrho_{s-k} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^k (\underline{x}_\psi^\alpha)^k + \cdots + \varrho_0 I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^s (\underline{x}_\psi^\alpha)^s]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Como $\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha = 0$, se obtiene que $I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^k = 0$, para $k \geq 3$. Por tanto, la expresión (2.12) se reduce a

$$\begin{aligned} & (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^s [(\underline{x}_\varphi^\alpha)^s I_{l-2s} (\underline{x}_\psi^\alpha)^s] (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^s = \varrho_s [\varrho_s I_{l-2s} + \varrho_{s-1} I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha (\underline{x}_\psi^\alpha) + \varrho_{s-2} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 (\underline{x}_\psi^\alpha)^2] \\ &+ \varrho_{s-1} (\underline{x}_\varphi^\alpha)^{\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha} [\varrho_s I_{l-2s} + \varrho_{s-1} I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha (\underline{x}_\psi^\alpha) + \varrho_{s-2} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 (\underline{x}_\psi^\alpha)^2] \\ &\vdots \\ &+ \varrho_{s-k} (\underline{x}_\varphi^\alpha)^k (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^k [\varrho_s I_{l-2s} + \varrho_{s-1} I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha (\underline{x}_\psi^\alpha) + \varrho_{s-2} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 (\underline{x}_\psi^\alpha)^2] \\ &\vdots \\ &+ \varrho_0 (\underline{x}_\varphi^\alpha)^s (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^s [\varrho_s I_{l-2s} + \varrho_{s-1} I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha (\underline{x}_\psi^\alpha) + \varrho_{s-2} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 (\underline{x}_\psi^\alpha)^2]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}
 (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^3 [(I_{l-2s}(\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2)(\underline{x}_\psi^\alpha)^2] &= (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^3 [(\underline{x}_\varphi^\alpha)^2 (I_{l-2s}(\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2)] \\
 &= (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 [g_{2,l-2s-2}(\underline{x}_\varphi^\alpha)(I_{l-2s}(\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2) + (\underline{x}_\varphi^\alpha)^2 (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha I_{l-2s}(\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2)] \\
 &= g_{2,l-2s-2} \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [g_{1,l-2s-2} I_{l-2s}(\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 - (\underline{x}_\varphi^\alpha)(\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha I_{l-2s}(\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2)] \\
 &= 0, \\
 (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^3 [(I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha) \underline{x}_\psi^\alpha] &= \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [(I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha) \underline{x}_\psi^\alpha] (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 \\
 &= \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [g_{1,l-2s-1} I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha - (I_{l-2s}(\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2) \underline{x}_\psi^\alpha] \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha \\
 &= \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [-g_{1,l-2s-2} I_{l-2s}(\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 + I_{l-2s}(\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^3 \underline{x}_\psi^\alpha] \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

donde se hace uso de la (φ, ψ) -inframonogenicidad de I_{l-2s} . Por consiguiente, para $k \geq 3$ se obtiene

$$(\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^k [(I_{l-2s}(\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2)(\underline{x}_\psi^\alpha)^2] = 0$$

y

$$(\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^k [(I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha) \underline{x}_\psi^\alpha] = 0.$$

Por ende, la expresión (2.13) puede ser simplificada a

$$\begin{aligned}
 &(\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^s [(\underline{x}_\varphi^\alpha)^s I_{l-2s}(\underline{x}_\psi^\alpha)^s] (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^s \\
 &= \varrho_s [\varrho_s I_{l-2s} + \varrho_{s-1} I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha (\underline{x}_\psi^\alpha) + \varrho_{s-2} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 (\underline{x}_\psi^\alpha)^2] \\
 &\quad + \varrho_{s-1} (\underline{x}_\varphi^\alpha) \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [\varrho_s I_{l-2s} + \varrho_{s-1} I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha (\underline{x}_\psi^\alpha) + \varrho_{s-2} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 (\underline{x}_\psi^\alpha)^2] \\
 &\quad + \varrho_{s-2} (\underline{x}_\varphi^\alpha)^2 (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 [\varrho_s I_{l-2s} + \varrho_{s-1} I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha (\underline{x}_\psi^\alpha) + \varrho_{s-2} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 (\underline{x}_\psi^\alpha)^2].
 \end{aligned}$$

Aplicando el operador $\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)$ por la izquierda (derecha) en la anterior identidad, se obtiene

$$\begin{aligned}
 &(\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^{s+1} [(\underline{x}_\varphi^\alpha)^s I_{l-2s}(\underline{x}_\psi^\alpha)^s] (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^{s+1} \\
 &= \varrho_s [\varrho_{s-1} \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha (\underline{x}_\psi^\alpha)] \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha + \varrho_{s-2} \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 (\underline{x}_\psi^\alpha)^2] \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha] \\
 &\quad + \varrho_{s-1} \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [(\underline{x}_\varphi^\alpha) \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [\varrho_s I_{l-2s} + \varrho_{s-1} I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha (\underline{x}_\psi^\alpha) + \varrho_{s-2} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 (\underline{x}_\psi^\alpha)^2]] \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha \\
 &\quad + \varrho_{s-2} \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [(\underline{x}_\varphi^\alpha)^2 (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 [\varrho_s I_{l-2s} + \varrho_{s-1} I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha (\underline{x}_\psi^\alpha) + \varrho_{s-2} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 (\underline{x}_\psi^\alpha)^2]] \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha.
 \end{aligned}$$

La aplicación repetida de este procedimiento demuestra que

$$\begin{aligned}
 & (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^{s+2} [(\underline{x}_\varphi^\alpha)^s I_{l-2s}(\underline{x}_\psi^\alpha)^s] (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^{s+2} \\
 &= \varrho_{s-1} \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [g_{1,l-2s-1} \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [\varrho_s I_{l-2s} + \varrho_{s-1} I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha(\underline{x}_\psi^\alpha) + \varrho_{s-2} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 (\underline{x}_\psi^\alpha)^2] \\
 &\quad - (\underline{x}_\varphi^\alpha) (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 [\varrho_s I_{l-2s} + \varrho_{s-1} I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha(\underline{x}_\psi^\alpha) + \varrho_{s-2} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 (\underline{x}_\psi^\alpha)^2]] (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 \\
 &\quad + \varrho_{s-2} \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [g_{2,l-2s-2}(\underline{x}_\varphi^\alpha) (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 [\varrho_s I_{l-2s} + \varrho_{s-1} I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha(\underline{x}_\psi^\alpha) + \varrho_{s-2} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 (\underline{x}_\psi^\alpha)^2] \\
 &\quad + (\underline{x}_\varphi^\alpha)^2 (\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^3 [\varrho_s I_{l-2s} + \varrho_{s-1} I_{l-2s} \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha(\underline{x}_\psi^\alpha) + \varrho_{s-2} I_{l-2s} (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 (\underline{x}_\psi^\alpha)^2]] (\psi \partial_{\underline{x}}^\alpha)^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\langle (\underline{x}_\varphi^\alpha)^q I_{l-2q}(\underline{x}_\psi^\alpha)^q, (\underline{x}_\varphi^\alpha)^p I_{l-2p}(\underline{x}_\psi^\alpha)^p \rangle = 0, \quad |p - q| \geq 2.$$

□

Por supuesto, estas relaciones de ortogonalidad siguen siendo válidas también en el caso límite, cuando $\alpha = 1$.

La importancia de las descomposiciones de Fischer encontradas se centra en que estas son más refinadas que la obtenida por polinomios biarmónicos. Este hecho posibilita la construcción de bases ortogonales para el espacio $\mathbb{R}^m[x]$ a través de polinomios (φ, ψ) -inframonomogénicos fraccionarios, las cuales difieren de las ya conocidas en la literatura. El siguiente ejemplo muestra que la anterior descomposición puede ayudar al tratamiento efectivo de ciertos problemas de frontera para el operador $\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha (\cdot) \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha$, el cual se presenta en generalizaciones naturales del sistema de Lamé-Navier en Elasticidad Lineal multidimensional.

Ejemplo 2. *Considérese el espacio $\mathbb{C}_3$ y sea el siguiente problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha f \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha = C & \text{en } B(0, 1), \\ f = x_3^2 e_2 & \text{en } \partial B(0, 1), \end{cases} \quad (2.14)$$

donde $B(0, 1)$ denota la bola unitaria de $\mathbb{C}^3$, C es una constante fija dada y sean los conjuntos estructurales

$$\varphi = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} e_2, \frac{\sqrt{2}}{2} e_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e_2, -e_3 \right\}$$

y

$$\psi = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}e_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 - \frac{\sqrt{6}}{6}e_3, \frac{\sqrt{3}}{3}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 - \frac{\sqrt{6}}{6}e_3, \frac{\sqrt{3}}{3}e_1 + \frac{\sqrt{6}}{3}e_3 \right\}.$$

Según la descomposición del Teorema 14 se tiene que todo polinomio fraccionario P_2 de grado 2 admite la siguiente representación:

$$P_2 = P_1 + I_2 + (\underline{x}_\varphi^\alpha)D(\underline{x}_\psi^\alpha),$$

donde P_1 es un polinomio fraccionario de grado a lo sumo 1, I_2 es un polinomio fraccionario 2-homogéneo (φ, ψ) -inframonogénico y D es una constante. Por tanto, el anterior problema de frontera se puede reducir a analizar los siguientes dos problemas de Dirichlet más simples:

$$\begin{cases} \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha g \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha = 0 & \text{en } B(0, 1), \\ g = x_3^2 e_2 & \text{en } \partial B(0, 1), \end{cases} \quad (2.15)$$

y

$$\begin{cases} \varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha [(\underline{x}_\varphi^\alpha)D(\underline{x}_\psi^\alpha)] \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha = C & \text{en } B(0, 1), \\ (\underline{x}_\varphi^\alpha)D(\underline{x}_\psi^\alpha) = 0 & \text{en } \partial B(0, 1). \end{cases} \quad (2.16)$$

Particularmente, para $\alpha = 1$ el primero de estos problemas tiene como solución el polinomio

$$g(\underline{x}) = \left[\frac{\sqrt{6}}{3}(\|\underline{x}\|^2 - 1) + x_3^2 \right] e_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}(\|\underline{x}\|^2 - 1)e_1 e_2 e_3,$$

mientras que el segundo problema permite determinar la constante D en dependencia de C , obteniendo así una solución al problema original.

2.4. Funciones (φ, ψ) -armónicas

Con modificaciones obvias, las fórmulas y algunos teoremas de las dos secciones anteriores pueden extenderse inmediatamente al caso en que se consideren funciones (φ, ψ) -armónicas en lugar de (φ, ψ) -inframonogénicas.

Sea $\mathcal{H}_{\varphi, \psi}^\alpha(l)$ el subespacio de $\Pi_\alpha(l)$ que contiene los polinomios fraccionarios (φ, ψ) -armónicos P_l , tales que $\varphi \partial_{\underline{x}}^\alpha \psi \partial_{\underline{x}}^\alpha P_l = 0$. Debido a la similitud, los detalles de la demostración del siguiente teorema pueden obviarse sin pérdida importante alguna.

Teorema 17 (Descomposición fraccionaria completa de Fischer (φ, ψ) -armónica). *Para $l \geq 2$ se cumple la siguiente descomposición:*

$$\Pi(l) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} (\underline{x}_\psi^\alpha \underline{x}_\varphi^\alpha)^s \mathcal{H}_{\varphi, \psi}^\alpha(l - 2s).$$

El teorema anterior significa que cualquier polinomio fraccionario l -homogéneo P_l admite la representación única:

$$P_l = H_l + \underline{x}_\psi^\alpha \underline{x}_\varphi^\alpha H_{l-2} + (\underline{x}_\psi^\alpha \underline{x}_\varphi^\alpha)^2 H_{l-4} + \dots + (\underline{x}_\psi^\alpha \underline{x}_\varphi^\alpha)^{\lfloor l/2 \rfloor} H_{l-2\lfloor l/2 \rfloor}, \quad (2.17)$$

donde $H_j, j = l-2\lfloor l/2 \rfloor, \dots, l$, son polinomios fraccionarios homogéneos (φ, ψ) -armónicos de grados indicados.

Surge la pregunta: ¿Existe una versión análoga del Teorema 16 para los polinomios representados en (2.17)?

2.4.1. El álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,3}$

El siguiente ejemplo ilustra cómo la respuesta a la pregunta anterior es negativa, aunque se considere el caso más sencillo $\alpha = 1$.

Escójase como conjuntos estructurales las bases $\varphi = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $\psi = \{e_3, e_2, e_1\}$ en $\mathbb{R}_{0,3}$, y considere el polinomio 6-homogéneo siguiente:

$$P_6 = (\underline{x}_\psi \underline{x}_\varphi) H_4 + (\underline{x}_\psi \underline{x}_\varphi)^3 H_0,$$

donde

$$H_4 = 8x_1^3 x_3 + 8x_3^3 x_1 + 4x_2^3 x_3 + (x_3^4 - x_2^4)(e_1 e_2 + e_2 e_3) + 4(x_3^4 - x_1^4 + x_3^3 x_2) e_1 e_3, \quad H_0 = 1.$$

Un cálculo directo muestra que H_4 es un polinomio (φ, ψ) -armónico y lo mismo vale obviamente para H_0 . Por otra parte, se tiene que

$$\underline{x}_\psi \underline{x}_\varphi = -2x_1 x_3 - x_2^2 + (x_2 x_3 - x_1 x_2) e_1 e_2 + (x_3^2 - x_1^2) e_1 e_3 + (x_2 x_3 - x_1 x_2) e_2 e_3,$$

$$\begin{aligned}
 \varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} [\underline{x}_{\psi} \underline{x}_{\varphi} H_4] &= -16x_1^4 + 304x_1^3x_3 - 96x_1^2x_3^2 + 24x_1x_2^3 - 96x_1x_2x_3^2 + 304x_1x_3^3 + 160x_2^3x_3 \\
 &\quad - 32x_2x_3^3 - 16x_3^4 + (80x_1^3x_2 - 24x_1^2x_2^2 - 240x_1^2x_2x_3 - 24x_1^2x_3^2 + 120x_1x_2^2x_3 \\
 &\quad + 144x_1x_2x_3^2 + 16x_1x_3^3 - 38x_2^4 - 120x_2^2x_3^2 - 240x_2x_3^3 + 102x_3^4)e_1e_2 + (-152x_1^4 \\
 &\quad + 32x_1^3x_3 + 48x_1x_2^3 - 72x_1x_2x_3^2 - 32x_1x_3^3 + 16x_2^3x_3 + 272x_2x_3^3 + 152x_3^4)e_1e_3 \\
 &\quad + (240x_1^3x_2 + 24x_1^2x_2^2 - 144x_1^2x_2x_3 - 24x_1^2x_3^2 + 72x_1x_2^2x_3 + 240x_1x_2x_3^2 - 16x_1x_3^3 \\
 &\quad - 22x_2^4 - 120x_2^2x_3^2 - 80x_2x_3^3 + 70x_3^4)e_2e_3, \\
 (\varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}})^2 [\underline{x}_{\psi} \underline{x}_{\varphi} H_4] &= 96x_1x_2 + 1920x_1x_3 - 288x_2x_3 - 1344x_1^2 - 1344x_3^2 + (1920x_1x_2 + 96x_1x_3 \\
 &\quad - 384x_2x_3 + 96x_1^2 + 144x_3^2)e_1e_2 + (480x_2x_3 - 384x_1x_2 - 576x_1^2 + 576x_3^2)e_1e_3 \\
 &\quad + (384x_1x_2 + 480x_1x_3 - 1920x_2x_3 - 96x_1^2 - 384x_2^2 + 720x_3^2)e_2e_3, \\
 (\varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}})^3 [\underline{x}_{\psi} \underline{x}_{\varphi} H_4] &= -6144 - 576e_1e_2 - 576e_2e_3.
 \end{aligned}$$

Por ende, debido a (2.7), se obtiene

$$\langle (\underline{x}_{\psi} \underline{x}_{\varphi})^3 H_0, \underline{x}_{\psi} \underline{x}_{\varphi} H_4 \rangle = \langle H_0, (\varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}})^3 [\underline{x}_{\psi} \underline{x}_{\varphi} H_4] \rangle = -6144 \neq 0.$$

2.4.2. El álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,2}$

Todavía se observará un caso curioso cuando consideremos polinomios fraccionarios (φ, ψ) -armónicos en $\mathbb{R}^2$ y que toman valores en $\mathbb{R}_{0,2}$. La matriz de transición de ψ a otro conjunto estructural φ es alternativamente de la forma

$$\mathcal{M}_{\psi, \varphi} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

o

$$\mathcal{M}_{\psi, \varphi} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

En el primer caso (2.18) se tiene que $|\mathcal{M}_{\psi, \varphi}| = 1$ y la clase de polinomios fraccionarios (φ, ψ) -armónicos no es ni más ni menos que la clase de polinomios fraccionarios armónicos usuales. En cambio, en el caso (2.19) se tiene la siguiente relación:

$$\varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} \underline{x}_{\psi}^{\alpha} - \underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \psi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} = 0. \quad (2.20)$$

Por lo tanto, en esta situación, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} \psi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} [(\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^s H_{l-2s}] &= \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} [g_{1,l-1} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha} (\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^{s-1} H_{l-2s} - \underline{x}_{\psi}^{\alpha} \psi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} [\underline{x}_{\varphi}^{\alpha} (\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^{s-1} H_{l-2s}]] \\
 &= g_{1,l-1} [g_{1,l-2} (\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^{s-1} H_{l-2s} - \underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} [(\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^{s-1} H_{l-2s}]] \\
 &\quad - \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} [(\underline{x}_{\psi}^{\alpha})^2 \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} [(\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^{s-1} H_{l-2s}]].
 \end{aligned}$$

Ahora note que

$$\varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} [(\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^{s-1} H_{l-2s}] = \underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \psi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} [\underline{x}_{\varphi}^{\alpha} (\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^{s-2} H_{l-2s}] = \underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \underline{x}_{\psi}^{\alpha} \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} [(\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^{s-2} H_{l-2s}]$$

y

$$\begin{aligned} & \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} [(\underline{x}_{\psi}^{\alpha})^2 \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} [(\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^{s-1} H_{l-2s}]] \\ &= \underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \psi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} [\underline{x}_{\psi}^{\alpha} (\underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \underline{x}_{\psi}^{\alpha})^{s-1} \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} H_{l-2s}] \\ &= \underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \{g_{1,l-3} (\underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \underline{x}_{\psi}^{\alpha})^{s-1} \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} H_{l-2s} - \underline{x}_{\psi}^{\alpha} \psi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} [(\underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \underline{x}_{\psi}^{\alpha})^{s-1} \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} H_{l-2s}]\} \\ &= \underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \{g_{1,l-3} (\underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \underline{x}_{\psi}^{\alpha})^{s-1} \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} H_{l-2s} - \underline{x}_{\psi}^{\alpha} (\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^{s-1} \psi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} H_{l-2s}\}. \end{aligned}$$

Por ende,

$$\begin{aligned} \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} \psi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} [(\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^s H_{l-2s}] &= g_{1,l-1} [g_{1,l-2} (\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^{s-1} H_{l-2s} - \underline{x}_{\varphi}^{\alpha} (\underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \underline{x}_{\psi}^{\alpha})^{s-1} \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} [H_{l-2s}]] \\ &\quad - \underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \{g_{1,l-3} (\underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \underline{x}_{\psi}^{\alpha})^{s-1} \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} H_{l-2s} - \underline{x}_{\psi}^{\alpha} (\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^{s-1} \psi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} H_{l-2s}\}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (\varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} \psi \partial_{\underline{x}}^{\alpha})^s [(\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^s H_{l-2s}] &= g_{1,l-1} g_{1,l-2} (\varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} \psi \partial_{\underline{x}}^{\alpha})^{s-1} [(\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^{s-1} H_{l-2s}] \\ &\quad - (g_{1,l-1} + g_{1,l-3}) \underline{x}_{\varphi}^{\alpha} (\psi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha})^{s-1} [(\underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \underline{x}_{\psi}^{\alpha})^{s-1} \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} H_{l-2s}] \\ &\quad + \underline{x}_{\varphi}^{\alpha} \underline{x}_{\psi}^{\alpha} (\varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} \psi \partial_{\underline{x}}^{\alpha})^{s-1} [(\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^{s-1} \psi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} \varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} H_{l-2s}], \end{aligned}$$

de donde esta fórmula puede aplicarse repetidamente para arribar a que

$$(\varphi \partial_{\underline{x}}^{\alpha} \psi \partial_{\underline{x}}^{\alpha})^{s+1} [(\underline{x}_{\psi}^{\alpha} \underline{x}_{\varphi}^{\alpha})^s H_{l-2s}] = 0.$$

Entonces, en el espacio $\mathbb{R}_{0,2}$, los polinomios representados en (2.17) son ortogonales entre sí con respecto al producto de Fischer. Por supuesto, esto hace que este caso sea más interesante.

Capítulo 3

Problemas de frontera para ecuaciones de Dirac

En este capítulo se presenta la segunda parte de los resultados principales de la investigación. En la sección 3.1 se resuelven los problemas A y B enunciados en la introducción. La sección 3.2 trata sobre el problema espectral para el operador sándwich, mientras que en la sección 3.3 se abordan los problemas de frontera estudiados desde la perspectiva de considerar operadores de Dirac contruidos con conjuntos estructurales. Conexiones interesantes con el clásico sistema de Lamé-Navier son discutidas en la sección 3.4. Al finalizar, en la sección 3.5 se consideran problemas de frontera para ecuaciones de Dirac de orden superior que generalizan los antes presentados.

3.1. Resolución de los problemas A y B

Antes de iniciar, recuérdese una característica obvia pero importante de $\partial_{\underline{x}}(\cdot)\partial_{\underline{x}}$. Este operador se comporta como Δ con respecto a los campos escalares y pseudoescalares. Por lo tanto, los problemas A y B se convierten en problemas para la ecuación de Poisson con una condición de contorno de tipo Dirichlet o Neumann. Es por ello que solo se considerarán campos k -vectoriales para $1 \leq k \leq m - 1$.

Se comienza con una generalización de [43, Lema 5.2.1, pág. 268].

Lema 1. Si $F_k(\underline{x})$ es solución del problema A, entonces las funciones $\vartheta(\underline{x}) = \partial_{\underline{x}} \wedge F_k(\underline{x})$ y $\nu(\underline{x}) = \partial_{\underline{x}} \cdot F_k(\underline{x})$ serán solución en Ω del sistema

$$\partial_{\underline{x}} \wedge \nu(\underline{x}) - \partial_{\underline{x}} \cdot \vartheta(\underline{x}) = (-1)^{k+1} f_k(\underline{x}), \quad \partial_{\underline{x}} \cdot \nu(\underline{x}) = 0, \quad \partial_{\underline{x}} \wedge \vartheta(\underline{x}) = 0, \quad (3.1)$$

satisfaciendo las condiciones de frontera

$$\nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad (n \wedge \vartheta)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.2)$$

y la condición integral

$$\int_{\Omega} \vartheta(\underline{x}) d\underline{x} = 0. \quad (3.3)$$

Inversamente, si ϑ y ν son soluciones en $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del sistema (3.1), satisfaciendo (3.2) o (3.2)-(3.3) cuando $k = m - 1$, entonces el campo k -vectorial $F_k \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, satisfaciendo en Ω el sistema

$$\partial_{\underline{x}} \cdot F_k(\underline{x}) = \nu(\underline{x}), \quad \partial_{\underline{x}} \wedge F_k(\underline{x}) = \vartheta(\underline{x}), \quad (3.4)$$

con

$$(n \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.5)$$

será solución del problema A.

Demostración:

Primeramente, ν y ϑ satisfacen directamente la segunda y tercera ecuación en (3.1), respectivamente. Si F_k es una solución del problema A entonces la primera ecuación en (3.1) es obviamente verificada. La primera condición en (3.2) es una consecuencia inmediata de la segunda condición (10). Para demostrar la segunda condición en (3.2), hágase uso de la Proposición 3. Por el Teorema 6, note que la condición integral (3.3) es cumplida.

Inversamente, asuma que ϑ y ν satisfacen el sistema (3.1) en Ω junto con las condiciones (3.2) o (3.2)-(3.3) cuando $k = m - 1$. Aplicando el Teorema 8 la solución $F_k(\underline{x})$ del problema A está únicamente determinada como la solución del sistema (3.4)-(3.5). Como $(\partial_{\underline{x}} \cdot \nu)|_{\Omega} = 0$ y $(\partial_{\underline{x}} \wedge \vartheta)|_{\Omega} = 0$, se tiene que se cumplen las condiciones necesarias y suficientes de solubilidad. $\square$

Examínese ahora el problema B.

Lema 2. Si $F_k(\underline{x})$ es solución del problema B, entonces las funciones $\vartheta(\underline{x}) = \partial_{\underline{x}} \wedge F_k(\underline{x})$ y $\nu(\underline{x}) = \partial_{\underline{x}} \cdot F_k(\underline{x})$ serán solución en Ω del sistema (3.1), satisfaciendo las condiciones de frontera

$$\vartheta|_{\partial\Omega} = 0, \quad (n \cdot \nu)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.6)$$

y la condición integral

$$\int_{\Omega} \nu(\underline{x}) d\underline{x} = 0. \quad (3.7)$$

Inversamente, si ϑ y ν son soluciones en $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del sistema (3.1), satisfaciendo (3.6) o (3.6)-(3.7) cuando $k = 1$, entonces el campo k -vectorial $F_k \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, satisfaciendo en Ω el sistema (3.4) con

$$(n \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.8)$$

será solución del problema B.

Demostración:

La prueba puede obtenerse de forma análoga a la del lema anterior. $\square$

Ahora considere el sistema (3.1)-(3.2) del Lema 1. Aplicando $\partial_{\underline{x}} \cdot$ a ambos lados de la primera ecuación en (3.1) y considerando el hecho que

$$-\Delta\nu = \partial_{\underline{x}} \wedge [\partial_{\underline{x}} \cdot \nu] + \partial_{\underline{x}} \cdot [\partial_{\underline{x}} \wedge \nu],$$

se obtiene

$$-\Delta\nu = (-1)^{k+1} \partial_{\underline{x}} \cdot f_k,$$

ya que $\partial_{\underline{x}} \cdot \nu = 0$ en Ω . Por tanto, la función ν es la solución del siguiente problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson:

$$\begin{cases} \Delta\nu = (-1)^k \partial_{\underline{x}} \cdot f_k & \text{en } \Omega, \\ \nu = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.9)$$

Entonces, la función ν queda únicamente determinada en términos de f_k como

$$\nu(\underline{x}) = (-1)^k \int_{\Omega} G(\underline{x}, \underline{y}) (\partial_{\underline{y}} \cdot f_k)(\underline{y}) d\underline{y}, \quad (3.10)$$

donde $G(\underline{x}, \underline{y})$ denota la función escalar de Green para el dominio Ω . El campo $(k+1)$ -vectorial ϑ será, por tanto, la solución del sistema

$$\begin{cases} \partial_{\underline{x}} \cdot \vartheta = \partial_{\underline{x}} \wedge \nu + (-1)^k f_k & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\underline{x}} \wedge \vartheta = 0 & \text{en } \Omega, \\ n \wedge \vartheta = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.11)$$

Obviamente, por (3.9) se tiene que

$$\partial_{\underline{x}} \cdot [\partial_{\underline{x}} \wedge \nu + (-1)^k f_k] = 0.$$

Por consiguiente, el campo ϑ está también únicamente determinado en términos de f_k como la solución de (3.11). Como el sistema (3.4)-(3.5) es únicamente soluble, entonces $F_k(\underline{x})$ puede ser expresado en términos de ϑ y ν por algún operador integral acotado a través de una fórmula como (1.17).

Usando la Proposition 1-(i) en (3.10) se obtiene

$$\nu(\underline{x}) = (-1)^k \left\{ \int_{\Omega} [\partial_{\underline{y}} \cdot (G(\underline{x}, \underline{y}) f_k(\underline{y})) - (\partial_{\underline{y}} G(\underline{x}, \underline{y})) \cdot f_k(\underline{y})] d\underline{y} \right\}.$$

Según las fórmulas de Stokes y tomando en cuenta que $G(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ cuando $\underline{x} \in \Omega$, $\underline{y} \in \partial\Omega$, resulta que

$$\nu(\underline{x}) = (-1)^{k+1} \int_{\Omega} [\partial_{\underline{y}} G(\underline{x}, \underline{y})] \cdot f_k(\underline{y}) d\underline{y} = H f_k, \quad (3.12)$$

donde H es un operador integral compacto. Similarmente, se puede expresar ϑ como la imagen de f_k por un operador integral compacto.

Por tanto, la solución $F_k(\underline{x})$ del problema A, cuando $1 \leq k < m-1$, admite la representación

$$F_k(\underline{x}) = \int_{\Omega} K(\underline{x}, \underline{y}) f_k(\underline{y}) d\underline{y}, \quad (3.13)$$

con un núcleo escalar débilmente singular $K(\underline{x}, \underline{y})$.

El caso cuando $k = m-1$ debe tratarse con un argumento diferente para encontrar ϑ . Antes que todo, note que bajo las condiciones correspondientes la solución del sistema (3.1) es única, como es fácil de comprobar. Está claro que el sistema (3.11) toma la forma

$$\begin{cases} \partial_{\underline{x}} \cdot \vartheta = \partial_{\underline{x}} \wedge \nu + (-1)^{m-1} f_{m-1} & \text{en } \Omega, \\ \int_{\Omega} \vartheta(\underline{x}) d\underline{x} = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Denotando $h = \partial_{\underline{x}} \wedge \nu + (-1)^{m-1} f_{m-1}$, se aprecia que la única solución del sistema (3.14) está entonces dada por medio de la transformada de Teodorescu

$$\vartheta(\underline{x}) = - \int_{\Omega} E_0(\underline{y} - \underline{x}) h(\underline{y}) d\underline{y} + \frac{1}{V(\Omega)} \int_{\Omega} \int_{\Omega} E_0(\underline{y} - \underline{x}) h(\underline{y}) d\underline{y} d\underline{x}. \quad (3.15)$$

El hecho de que ϑ está representado por un operador integral compacto se implica gracias a la compacidad de la transformada de Teodorescu en $L^p(\Omega)$ con $p > 1$ (consultar [56, pág. 98]). Resultados análogos para el problema B pueden ser probados usando ideas similares como en el problema A.

De este modo, se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 18. *Sea $f_k(\underline{x}) \in L^p(\Omega)$ con $p > 1$. Entonces, los problemas A y B son únicamente solubles y sus soluciones están dadas por operadores integrales compactos en $L^p(\Omega)$.*

Observación 3. *El enunciado del Teorema 18 sigue siendo válido si se reemplaza el operador sándwich en los problemas A y B por el operador de Laplace. Puesto que*

$$-\Delta F_k = \partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot F_k + \partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge F_k,$$

entonces todos los métodos de esta sección pueden disponerse de modo que los problemas para la ecuación de Poisson en el contexto del Análisis de Clifford también queden bien planteados. Estas conexiones podrían conducir a interesantes implicaciones en el estudio de las ecuaciones de Maxwell, proporcionando aplicaciones concretas a la física.

3.2. Propiedades espectrales

El Teorema 18 ofrece la posibilidad de resolver el problema espectral para el operador sándwich $\partial_{\underline{x}}(\cdot)\partial_{\underline{x}}$. Sean F_k y G_k dos campos k -vectoriales pertenecientes a $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Se puede apreciar que

$$\begin{aligned} \langle \partial_{\underline{x}} F_k \partial_{\underline{x}}, G_k \rangle &= \left[\int_{\Omega} \overline{\partial_{\underline{x}} F_k} \partial_{\underline{x}} G_k d\underline{x} \right]_0 = \left[\int_{\partial\Omega} (\partial_{\underline{x}} \overline{F_k}) n G_k d\underline{x} - \int_{\Omega} (\partial_{\underline{x}} \overline{F_k}) (\partial_{\underline{x}} G_k) d\underline{x} \right]_0 \\ &= \left[\int_{\partial\Omega} [(\partial_{\underline{x}} \cdot \overline{F_k})(n \cdot G_k) + (\partial_{\underline{x}} \wedge \overline{F_k})(n \wedge G_k)] d\underline{x} - \int_{\Omega} [(\partial_{\underline{x}} \cdot \overline{F_k})(\partial_{\underline{x}} \cdot G_k) + \right. \\ &\quad \left. + (\partial_{\underline{x}} \wedge \overline{F_k})(\partial_{\underline{x}} \wedge G_k)] d\underline{x} \right]_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle F_k, \partial_{\underline{x}} G_k \partial_{\underline{x}} \rangle &= \left[\int_{\Omega} \overline{F_k} (\partial_{\underline{x}} G_k \partial_{\underline{x}}) d\underline{x} \right]_0 = \left[\int_{\partial\Omega} \overline{F_k} n (G_k \partial_{\underline{x}}) d\underline{x} - \int_{\Omega} (\overline{F_k} \partial_{\underline{x}}) (G_k \partial_{\underline{x}}) d\underline{x} \right]_0 \\
 &= \left[\int_{\partial\Omega} [(\overline{F_k} \cdot n)(G_k \cdot \partial_{\underline{x}}) + (\overline{F_k} \wedge n)(G_k \wedge \partial_{\underline{x}})] d\underline{x} - \int_{\Omega} [(\overline{F_k} \cdot \partial_{\underline{x}})(G_k \cdot \partial_{\underline{x}}) + \right. \\
 &\quad \left. + (\overline{F_k} \wedge \partial_{\underline{x}})(G_k \wedge \partial_{\underline{x}})] d\underline{x} \right]_0.
 \end{aligned}$$

De estas fórmulas se deduce que si F_k y G_k satisfacen las condiciones (10) o (11), entonces

$$\langle \partial_{\underline{x}} F_k \partial_{\underline{x}}, G_k \rangle = \langle F_k, \partial_{\underline{x}} G_k \partial_{\underline{x}} \rangle, \quad (3.16)$$

o sea, la ecuación $\partial_{\underline{x}} F_k \partial_{\underline{x}} = f_k$, junto con las condiciones de frontera de los problemas A y B, determinan el operador autoadjunto. Esto justifica la simetría de los núcleos de los operadores compactos. Claramente, como consecuencia, se puede concluir que las funciones propias de los problemas espectrales son soluciones de la ecuación simétrica de Fredholm

$$F_k(\underline{x}) - \lambda \int_{\Omega} K(\underline{x}, \underline{y}) F_k(\underline{y}) d\underline{y} = 0, \quad (3.17)$$

por lo que la existencia de los valores propios y el correspondiente sistema completo de funciones propias se obtiene a partir del Teorema de Fredholm (ver [47]).

Las ideas esbozadas por Dzhuraev [43], cuando se analizan desde un punto de vista multidimensional, conducen al siguiente teorema:

Teorema 19. *Si $S(\underline{x})$ es una matriz real, cuadrada y simétrica de orden $\binom{m}{k}$, entonces para el operador $P := \partial_{\underline{x}}(\cdot)\partial_{\underline{x}} + S(\underline{x})$ existe una sucesión infinita de valores propios reales y las correspondientes funciones propias forman un sistema completo de funciones ortonormales en $L^2(\Omega)$, las cuales satisfacen*

$$\|F_k^{(j)}(\underline{x})\|_{W_2^2(\Omega)} \leq cte \|PF_k^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para este operador sándwich perturbado, los valores propios pueden ser positivos $\{\lambda_j^+\}$ y negativos $\{\lambda_j^-\}$, tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j^{\pm} = \pm\infty$.

3.3. Un enfoque no estándar

Sean φ y ψ dos conjuntos estructurales arbitrarios de $\mathbb{R}^m$. Para campos k -vectoriales F_k y f_k se tiene que

$$\varphi_{\partial_{\underline{x}}} F_k \psi_{\partial_{\underline{x}}} = f_k \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_{\partial_{\underline{x}}} \cdot \psi_{\partial_{\underline{x}}} \cdot F_k & = 0, \\ \varphi_{\partial_{\underline{x}}} \cdot \psi_{\partial_{\underline{x}}} \wedge F_k - \varphi_{\partial_{\underline{x}}} \wedge \psi_{\partial_{\underline{x}}} \cdot F_k & = (-1)^k f_k, \\ \varphi_{\partial_{\underline{x}}} \wedge \psi_{\partial_{\underline{x}}} \wedge F_k & = 0. \end{cases}$$

Es por la idea que subyace al razonamiento anterior que considerar problemas análogos A y B para el operador $\varphi_{\partial_{\underline{x}}}(\cdot)\psi_{\partial_{\underline{x}}}$ sería del todo legítimo. Sin embargo, en general, esos problemas son de poco interés porque estarían mal planteados.

El siguiente resultado generaliza el Lema 1:

Teorema 20. Si $F_k(\underline{x}) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es una solución del siguiente sistema

$$(\varphi_{\partial_{\underline{x}}} \wedge \psi_{\partial_{\underline{x}}} \cdot F_k - \varphi_{\partial_{\underline{x}}} \cdot \psi_{\partial_{\underline{x}}} \wedge F_k)|_{\Omega} = f_k, \quad (3.18)$$

$$(n_{\psi} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.19)$$

$$(\psi_{\partial_{\underline{x}}} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.20)$$

entonces las funciones $\vartheta(\underline{x}) = \psi_{\partial_{\underline{x}}} \wedge F_k(\underline{x})$ y $\nu(\underline{x}) = \psi_{\partial_{\underline{x}}} \cdot F_k(\underline{x})$ serán una solución en Ω del sistema

$$\varphi_{\partial_{\underline{x}}} \wedge \nu(\underline{x}) - \varphi_{\partial_{\underline{x}}} \cdot \vartheta(\underline{x}) = f_k(\underline{x}), \quad \psi_{\partial_{\underline{x}}} \cdot \nu(\underline{x}) = 0, \quad \psi_{\partial_{\underline{x}}} \wedge \vartheta(\underline{x}) = 0, \quad (3.21)$$

satisfaciendo las condiciones de frontera

$$\nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad (n_{\psi} \wedge \vartheta)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.22)$$

y la misma condición integral (3.3), donde $n_{\psi} = \sum_{j=1}^m n_j \psi^j$ y n_j es la j -ésima componente del vector normal n sobre $\partial\Omega$. Inversamente, si ϑ y ν son soluciones en $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del sistema (3.21), satisfaciendo (3.22) o (3.22)-(3.3) cuando $k = m - 1$, entonces el campo k -vectorial F_k , satisfaciendo en Ω el sistema

$$\psi_{\partial_{\underline{x}}} \cdot F_k(\underline{x}) = \nu(\underline{x}), \quad \psi_{\partial_{\underline{x}}} \wedge F_k(\underline{x}) = \vartheta(\underline{x}), \quad (3.23)$$

con

$$(n_{\psi} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.24)$$

será una solución del sistema (3.18)-(3.19)-(3.20).

El sistema (3.21)-(3.22)-(3.3) tiene el inconveniente de no poder resolverse de forma única bajo conjuntos estructurales no equivalentes. Se puede aclarar esto con la observación de que el sistema

$$\begin{cases} \varphi_{\partial_{\underline{x}}} \wedge \nu(\underline{x}) = 0 & \text{en } \Omega, \\ \psi_{\partial_{\underline{x}}} \cdot \nu(\underline{x}) = 0 & \text{en } \Omega, \\ \nu(\underline{x}) = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.25)$$

podría tener una solución no trivial en Ω . En efecto, para los conjuntos estructurales no equivalentes en $\mathbb{R}^4$

$$\varphi = \{e_2, -e_1, e_4, -e_3\},$$

$$\psi = \{e_1, e_2, e_3, e_4\},$$

sea el campo vectorial definido por

$$\nu(\underline{x}) = (\|\underline{x}\|^2 - 1)(x_2e_1 - x_1e_2 + x_4e_3 - x_3e_4)$$

en la bola unitaria de $\mathbb{R}^4$.

Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} \psi_{\partial_{\underline{x}}} \nu(\underline{x}) &= e_1[2x_1x_2e_1 - 3x_1^2e_2 - x_2^2e_2 - x_3^2e_2 - x_4^2e_2 + e_2 + 2x_1x_4e_3 - 2x_1x_3e_4] \\ &\quad + e_2[3x_2^2e_1 + x_1^2e_1 + x_3^2e_1 + x_4^2e_1 - e_1 - 2x_2x_1e_2 + 2x_2x_4e_3 - 2x_2x_3e_4] \\ &\quad + e_3[2x_3x_2e_1 - 2x_3x_1e_2 + 2x_3x_4e_3 - 3x_3^2e_4 - x_1^2e_4 - x_2^2e_4 - x_4^2e_4 + e_4] \\ &\quad + e_4[2x_4x_2e_1 - 2x_1x_4e_2 + 3x_4^2e_3 + x_1^2e_3 + x_2^2e_3 + x_3^2e_3 - e_3 - 2x_3x_4e_4], \\ \psi_{\partial_{\underline{x}}} \cdot \nu(\underline{x}) &= -2x_1x_2 + 2x_2x_1 - 2x_3x_4 + 2x_3x_4 = 0, \\ \varphi_{\partial_{\underline{x}}} \nu(\underline{x}) &= e_2[2x_1x_2e_1 - 3x_1^2e_2 - x_2^2e_2 - x_3^2e_2 - x_4^2e_2 + e_2 + 2x_1x_4e_3 - 2x_1x_3e_4] \\ &\quad - e_1[3x_2^2e_1 + x_1^2e_1 + x_3^2e_1 + x_4^2e_1 - e_1 - 2x_2x_1e_2 + 2x_2x_4e_3 - 2x_2x_3e_4] \\ &\quad + e_4[2x_3x_2e_1 - 2x_3x_1e_2 + 2x_3x_4e_3 - 3x_3^2e_4 - x_1^2e_4 - x_2^2e_4 - x_4^2e_4 + e_4] \\ &\quad - e_3[2x_4x_2e_1 - 2x_1x_4e_2 + 3x_4^2e_3 + x_1^2e_3 + x_2^2e_3 + x_3^2e_3 - e_3 - 2x_3x_4e_4], \\ \varphi_{\partial_{\underline{x}}} \wedge \nu(\underline{x}) &= 2x_1x_2e_2e_1 + 2x_1x_4e_2e_3 - 2x_1x_3e_2e_4 + 2x_2x_1e_1e_2 - 2x_2x_4e_1e_3 \\ &\quad + 2x_2x_3e_1e_4 + 2x_3x_2e_4e_1 - 2x_3x_1e_4e_2 + 2x_3x_4e_4e_3 - 2x_4x_2e_3e_1 \\ &\quad + 2x_1x_4e_3e_2 + 2x_3x_4e_3e_4 = 0. \end{aligned}$$

De hecho, se pueden describir muchos ejemplos interesantes.

3.4. Sistema de Lamé-Navier

La teoría de la Elasticidad Lineal es un área importante de la Mecánica de Medios Continuos con una amplia aplicación en ciencia e ingeniería. Esta teoría es esencial para materiales isótropos y linealmente elásticos sometidos a pequeñas deformaciones. La ecuación de equilibrio en términos del vector de desplazamiento $\vec{u}$ es

$$\mu \Delta \vec{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) = \vec{F}, \quad (3.26)$$

donde $\mu > 0$, $\lambda > -\frac{2}{3}\mu$ y $\vec{F}$ es el campo vectorial de fuerza que actúa sobre el cuerpo por unidad de volumen. Las constantes μ y λ caracterizan la elasticidad de un cuerpo dado. En este contexto, μ se denomina módulo transversal o de cizalladura. Esta notación fue introducida por Gabriel Lamé en 1837 y es por ello que se les suele denominar parámetros de Lamé [70].

El operador

$$\mathcal{L} := \mu \Delta + (\mu + \lambda) \nabla \nabla \cdot$$

es bien conocido como operador de Lamé-Navier y es por este motivo que se acostumbra referirse a (3.26) como sistema de Lamé-Navier. Los parámetros de Lamé satisfacen las condiciones de elipticidad de Legendre-Hadamard para $\mathcal{L}$:

$$\mu > 0, \quad 2\mu + \lambda > 0. \quad (3.27)$$

Como el módulo de volumen $\mathcal{K} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ es usualmente positivo, entonces la segunda condición en (3.27) es sustituida por la condición más fuerte antes mencionada. El operador de Lamé-Navier aparece en las ecuaciones de momento de Navier-Stokes y como divergencia del tensor de tensiones de Cauchy para un medio isótropo lineal. El principio clásico del máximo de Hopf implica que el problema de Dirichlet para el sistema de Lamé-Navier tiene una solución única, cuya demostración original se remonta a Gustav Robert Kirchhoff [66].

Los problemas de Elasticidad plana pueden resolverse eficazmente utilizando la teoría de funciones de variable compleja. El Análisis de Clifford proporciona técnicas y métodos muy eficaces para tratar estos problemas en dimensiones superiores. Utilizando la reescritura

del sistema homogéneo de Lamé-Navier en [51], es fácil comprobar que (3.26) puede tomar la forma cliffordiana

$$\left(\frac{\mu + \lambda}{2}\right) \partial_{\underline{x}} \vec{u} \partial_{\underline{x}} - \left(\frac{3\mu + \lambda}{2}\right) \Delta \vec{u} = -\vec{F}. \quad (3.28)$$

Denótase por $\mathcal{L}^*$ al operador cliffordiano de Lamé-Navier

$$\left(\frac{\mu + \lambda}{2}\right) \partial_{\underline{x}}(\cdot) \partial_{\underline{x}} - \left(\frac{3\mu + \lambda}{2}\right) \Delta.$$

En los sólidos homogéneos e isótropos, existen dos tipos de ondas: las ondas longitudinales, de presión o primarias (ondas P) y las ondas transversales, de cizalladura o secundarias (ondas S). Las ondas longitudinales consisten en oscilaciones paralelas a la dirección de propagación, como por ejemplo, si se empuja o se jala un resorte horizontalmente, se crea una onda longitudinal que se mueve a lo largo de este, con las espiras del resorte comprimiéndose y expandiéndose. Las ondas transversales consisten en oscilaciones perpendiculares a la dirección de propagación, como por ejemplo, cuando se sacude o se toca una cuerda tensa, la cuerda vibra perpendicularmente a su dirección, creando una onda que se propaga a lo largo de esta. Los módulos longitudinal y transversal controlan la velocidad de una onda primaria y secundaria, respectivamente.

Combinando las relaciones (1.22) y (1.23), se puede reescribir (3.28) en la forma

$$\mu \partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge \vec{u} + M \partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot \vec{u} = -\vec{F}, \quad (3.29)$$

donde M denota el módulo longitudinal. Note que (3.29) brinda directamente los dos módulos elásticos que determinan el tipo de ondas. La ecuación (3.29) en el sentido de campos k -vectoriales toma la forma

$$\alpha \partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge F_k + \beta \partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot F_k = f_k, \quad (3.30)$$

donde $\alpha = (-1)^k \frac{\mu + \lambda}{2} + \frac{3\mu + \lambda}{2}$, $\beta = (-1)^{k+1} \frac{\mu + \lambda}{2} + \frac{3\mu + \lambda}{2}$, $F_k \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}^{(k)})$ y $f_k \in C(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}^{(k)})$.

La ecuación (3.30) abre el camino para la aplicación práctica del producto interior y exterior en la resolución de problemas espectrales y de frontera para el operador de Lamé-Navier en la teoría de la Elasticidad multidimensional.

Considérense ahora los siguientes problemas de frontera relacionados con (3.30):

- PROBLEMA A1. Encontrar todas las soluciones de (3.30) en $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, satisfaciendo las condiciones de frontera

$$(n \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\partial_{\underline{x}} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.31)$$

- PROBLEMA B1. Encontrar todas las soluciones de (3.30) en $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, satisfaciendo las condiciones de frontera

$$(n \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.32)$$

En los casos límites cuando $k = 0$ o $k = m$, los problemas anteriores pueden reducirse directamente a problemas de Dirichlet o Neumann para una ecuación de Poisson. Por esta razón se limitará a campos k -vectoriales con $1 \leq k \leq m - 1$.

Siguiendo técnicas muy similares a las utilizadas en [17] y presentadas anteriormente, se deduce que los problemas A1 y B1 tienen solución única y que las soluciones pueden expresarse mediante operadores integrales compactos en $L^p(\Omega)$, $p > 1$,

$$F_k(\underline{x}) = \int_{\Omega} S(\underline{x}, y) f_k(y) dy,$$

con un núcleo escalar débilmente singular $S(\underline{x}, y)$.

El buen planteamiento de los problemas sigue siendo válido, aun si se omiten las restricciones de los parámetros de Lamé, excepto para los casos en que α o β sean cero. Por ejemplo, si $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$ en el problema A1, entonces se tiene la siguiente relación

$$\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot F_k = \frac{f_k}{\beta} \quad (3.33)$$

con la condición de frontera (3.31) y el campo $(k - 1)$ -vectorial $\partial_{\underline{x}} \cdot F_k$ está únicamente determinado. Sin embargo, el campo F_k no está únicamente determinado por la primera condición de (3.31). Si F_k es una solución del problema de frontera (3.31)-(3.33), entonces $F_k + Q_k$ con $Q_k \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}^{(k)})$ tal que $(\partial_{\underline{x}} \cdot Q_k)|_{\Omega} = 0$ y $Q_k|_{\partial\Omega} = 0$, es otra solución. Por otra parte, si ahora $\beta = 0$ y $\alpha \neq 0$, entonces resulta que

$$\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge F_k = \frac{f_k}{\alpha} \quad (3.34)$$

con las mismas condiciones de frontera (3.31). Por la Proposición 3, se tiene

$$[n \wedge (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)]|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.35)$$

Debido al Teorema 8, el campo $(k+1)$ -vectorial $\partial_{\underline{x}} \wedge F_k$ está únicamente determinado en Ω por las condiciones (3.34) y (3.35). No obstante, el campo F_k no lo está por las condiciones de frontera (3.31). Un análisis similar puede ser hecho para el problema B1.

Sean F_k y G_k dos campos k -vectoriales en $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(\frac{\mu + \lambda}{2} \right) \partial_{\underline{x}} F_k \partial_{\underline{x}} + \left(\frac{3\mu + \lambda}{2} \right) \partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} F_k, G_k \right\rangle \\ &= \frac{\mu + \lambda}{2} \left[\int_{\Omega} (\partial_{\underline{x}} \overline{F_k} \partial_{\underline{x}}) G_k d\underline{x} \right]_0 + \frac{3\mu + \lambda}{2} \left[\int_{\Omega} (\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} \overline{F_k}) G_k d\underline{x} \right]_0 \\ &= \frac{\mu + \lambda}{2} \left[\int_{\partial\Omega} (\partial_{\underline{x}} \overline{F_k}) n G_k d\underline{x} - \int_{\Omega} (\partial_{\underline{x}} \overline{F_k}) (\partial_{\underline{x}} G_k) d\underline{x} \right]_0 \\ &\quad + \frac{3\mu + \lambda}{2} \left[\int_{\partial\Omega} (\overline{F_k} \partial_{\underline{x}}) n G_k d\underline{x} - \int_{\Omega} (\overline{F_k} \partial_{\underline{x}}) (\partial_{\underline{x}} G_k) d\underline{x} \right]_0 \\ &= \frac{\mu + \lambda}{2} \left[\int_{\partial\Omega} [(\partial_{\underline{x}} \cdot \overline{F_k})(n \cdot G_k) + (\partial_{\underline{x}} \wedge \overline{F_k})(n \wedge G_k)] d\underline{x} - \int_{\Omega} (\partial_{\underline{x}} \cdot \overline{F_k})(\partial_{\underline{x}} \cdot G_k) d\underline{x} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} (\partial_{\underline{x}} \wedge \overline{F_k})(\partial_{\underline{x}} \wedge G_k) d\underline{x} \right]_0 + \frac{3\mu + \lambda}{2} \left[\int_{\partial\Omega} (\overline{F_k} \cdot \partial_{\underline{x}})(n \cdot G_k) d\underline{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial\Omega} (\overline{F_k} \wedge \partial_{\underline{x}})(n \wedge G_k) d\underline{x} - \int_{\Omega} [(\overline{F_k} \cdot \partial_{\underline{x}})(\partial_{\underline{x}} \cdot G_k) + (\overline{F_k} \wedge \partial_{\underline{x}})(\partial_{\underline{x}} \wedge G_k)] d\underline{x} \right]_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\langle F_k, \left(\frac{\mu + \lambda}{2} \right) \partial_{\underline{x}} G_k \partial_{\underline{x}} + \left(\frac{3\mu + \lambda}{2} \right) \partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} G_k \right\rangle \\ &= \frac{\mu + \lambda}{2} \left[\int_{\Omega} \overline{F_k} (\partial_{\underline{x}} G_k \partial_{\underline{x}}) d\underline{x} \right]_0 + \frac{3\mu + \lambda}{2} \left[\int_{\Omega} \overline{F_k} (\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} G_k) d\underline{x} \right]_0 \\ &= \frac{\mu + \lambda}{2} \left[\int_{\partial\Omega} \overline{F_k} n (G_k \partial_{\underline{x}}) d\underline{x} - \int_{\Omega} (\overline{F_k} \partial_{\underline{x}}) (G_k \partial_{\underline{x}}) d\underline{x} \right]_0 \\ &\quad + \frac{3\mu + \lambda}{2} \left[\int_{\partial\Omega} \overline{F_k} n (\partial_{\underline{x}} G_k) d\underline{x} - \int_{\Omega} (\overline{F_k} \partial_{\underline{x}}) (\partial_{\underline{x}} G_k) d\underline{x} \right]_0 \\ &= \frac{\mu + \lambda}{2} \left[\int_{\partial\Omega} [(\overline{F_k} \cdot n)(G_k \cdot \partial_{\underline{x}}) + (\overline{F_k} \wedge n)(G_k \wedge \partial_{\underline{x}})] d\underline{x} - \int_{\Omega} (\overline{F_k} \cdot \partial_{\underline{x}})(G_k \cdot \partial_{\underline{x}}) d\underline{x} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} (\overline{F_k} \wedge \partial_{\underline{x}})(G_k \wedge \partial_{\underline{x}}) d\underline{x} \right]_0 + \frac{3\mu + \lambda}{2} \left[\int_{\partial\Omega} (\overline{F_k} \cdot n)(\partial_{\underline{x}} \cdot G_k) d\underline{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial\Omega} (\overline{F_k} \wedge n)(\partial_{\underline{x}} \wedge G_k) d\underline{x} - \int_{\Omega} [(\overline{F_k} \cdot \partial_{\underline{x}})(\partial_{\underline{x}} \cdot G_k) + (\overline{F_k} \wedge \partial_{\underline{x}})(\partial_{\underline{x}} \wedge G_k)] d\underline{x} \right]_0. \end{aligned}$$

Combinando estas fórmulas, se deduce que si F_k y G_k satisfacen (3.31) o (3.32), entonces

$$\langle \mathcal{L}^* F_k, G_k \rangle = \langle F_k, \mathcal{L}^* G_k \rangle. \quad (3.36)$$

Nótese que en realidad se ha demostrado que las funciones propias de los problemas espectrales son soluciones de una ecuación simétrica de Fredholm, lo que amplía los resultados reportados en [17, Sección 4] y presentados en esta tesis en las secciones anteriores de este capítulo.

3.5. Operadores de Dirac de orden superior

Para un campo k -vectorial F_k , tomando en cuenta las relaciones (1.22) y (1.23), se obtiene que

$$(-1)^s \Delta^s F_k = (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge)^s F_k + (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot)^s F_k \quad (3.37)$$

y

$$\partial_{\underline{x}}^{2s-1} F_k \partial_{\underline{x}} = (-1)^k [(\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge)^s F_k - (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot)^s F_k], \quad s \in \mathbb{Z}_+^*. \quad (3.38)$$

Las reescrituras anteriores a través de los operadores $\partial_{\underline{x}} \cdot$ y $\partial_{\underline{x}} \wedge$ permiten seguir la misma metodología en los problema A y B para estudiar ahora dos problemas de frontera asociados a las ecuaciones

$$\partial_{\underline{x}}^{2s-1} F_k \partial_{\underline{x}} = f_k, \quad (3.39)$$

$$\Delta^s F_k = f_k, \quad (3.40)$$

donde $f_k \in C(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}^{(k)})$.

Nuestra atención está restringida al sistema (3.39), porque para (3.40) se obtendrían resultados completamente similares.

- PROBLEMA A2. Encontrar todas las soluciones de la ecuación (3.39) en $C^{2s}(\Omega) \cap C^{2s-1}(\overline{\Omega})$, satisfaciendo las condiciones de frontera

$$\begin{aligned}
 (n \wedge F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\
 (\partial_{\underline{x}} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\
 (n \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\
 (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\
 &\vdots \\
 (n \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge)^{s-1} F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\
 (\partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot)^{s-1} F_k)|_{\partial\Omega} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

– PROBLEMA B2. Encontrar todas las soluciones de (3.39) en $C^{2s}(\Omega) \cap C^{2s-1}(\overline{\Omega})$, satisfaciendo las condiciones de frontera

$$\begin{aligned}
 (n \cdot F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\
 (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\
 (n \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\
 (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\
 &\vdots \\
 (n \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot)^{s-1} F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\
 (\partial_{\underline{x}} \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge)^{s-1} F_k)|_{\partial\Omega} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

De nuevo, los casos límite $k = 0$ o $k = m$ se reducen a problemas de Dirichlet o Neumann y se omitirán. Note que para $s = 1$ los problemas A2 y B2 coinciden con los problemas A y B para la ecuación sándwich no homogénea.

Se comienza con una generalización del Lema 1.

Teorema 21. Sea $F_k(\underline{x})$ una solución del problema A2, entonces el par de funciones

$$\nu(\underline{x}) = \partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot)^{s-1} F_k(\underline{x})$$

y

$$\vartheta(\underline{x}) = \partial_{\underline{x}} \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge)^{s-1} F_k(\underline{x})$$

serán una solución del sistema

$$\partial_{\underline{x}} \wedge \nu(\underline{x}) - \partial_{\underline{x}} \cdot \vartheta(\underline{x}) = (-1)^{k+1} f_k(\underline{x}), \quad \partial_{\underline{x}} \cdot \nu(\underline{x}) = 0, \quad \partial_{\underline{x}} \wedge \vartheta(\underline{x}) = 0, \quad (3.43)$$

en Ω , satisfaciendo las condiciones de frontera

$$\nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad (n \wedge \vartheta)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.44)$$

y la condición integral

$$\int_{\Omega} \vartheta(\underline{x}) d\underline{x} = 0. \quad (3.45)$$

Inversamente, si el par (ϑ, ν) es solución en $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del sistema (3.43), satisfaciendo (3.44) o (3.44)-(3.45) cuando $k = m - 1$, entonces un campo k -vectorial $F_k \in C^{2s-1}(\Omega) \cap C^{2s-2}(\overline{\Omega})$, tal que

$$\partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}})^{s-1} F_k(\underline{x}) = \nu(\underline{x}), \quad \partial_{\underline{x}} \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}})^{s-1} F_k(\underline{x}) = \vartheta(\underline{x}), \quad (3.46)$$

en Ω con

$$\begin{aligned} (n \wedge F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\ (\partial_{\underline{x}} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\ (n \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\ (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\ &\vdots \\ (n \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}})^{s-1} F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (3.47)$$

será una solución del problema A2.

Demostración:

Si $F_k(\underline{x})$ es una solución del problema A2, entonces el campo $(k - 1)$ -vectorial $\nu(\underline{x})$ junto con el campo $(k + 1)$ -vectorial $\vartheta(\underline{x})$ satisfacen automáticamente la primera ecuación en (3.43). Gracias a la Proposición 2, la segunda y tercera ecuaciones en (3.43) se cumplen. La primera condición de frontera en (3.44) se implica de la última condición en (3.41). Para deducir la segunda condición de frontera en (3.44), se aplican la Proposición 3 y la penúltima condición en (3.41). De este modo, se tiene que

$$(n \wedge \partial_{\underline{x}} \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}})^{s-1} F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.48)$$

o, equivalentemente, $(n \wedge \vartheta)|_{\partial\Omega} = 0$. Usando el Teorema 6 y la penúltima condición en (3.41), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vartheta(\underline{x}) d\underline{x} &= \int_{\Omega} \partial_{\underline{x}} \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge)^{s-1} F_k(\underline{x}) d\underline{x} \\ &= \int_{\partial\Omega} n \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge)^{s-1} F_k(\underline{x}) d\underline{x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Inversamente, asúmesese que el par (ϑ, ν) satisface (3.43) en Ω junto con (3.44) o (3.44)-(3.45) cuando $k = m - 1$. Por el Teorema 8 y la Proposición 2, en vista de (3.46)-(3.47), resulta que el campo k -vectorial $(\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge)^{s-1} F_k(\underline{x})$ está únicamente determinado en Ω .

Como

$$(n \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge)^{s-2} F_k)|_{\partial\Omega} = 0,$$

entonces

$$(n \wedge \partial_{\underline{x}} \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge)^{s-2} F_k)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Por tanto, debido al Teorema 8, el campo $(k+1)$ -vectorial $\partial_{\underline{x}} \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge)^{s-2} F_k$ está únicamente determinado en Ω , tal que $(\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge)^{s-2} F_k$ también lo está en el mismo dominio. La aplicación repetida de este procedimiento permite demostrar que

$$\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge F_k$$

está únicamente determinado en Ω . Por la primera condición en (3.47) y la Proposición 3, se tiene

$$(n \wedge (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k))|_{\partial\Omega} = 0,$$

de donde $\partial_{\underline{x}} \wedge F_k$ está también únicamente determinado en Ω .

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot)^{s-1} F_k(\underline{x}) &= -\Delta[\partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot)^{s-2} F_k] - \partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot)^{s-2} F_k \\ &= -\Delta[\partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot)^{s-2} F_k] = \nu. \end{aligned}$$

Gracias a la condición de frontera

$$(\partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot)^{s-2} F_k)|_{\partial\Omega} = 0,$$

se arriba al siguiente problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta[\partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}})^{s-2} F_k] = \nu & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}})^{s-2} F_k = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.49)$$

Por consiguiente, $\partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}})^{s-2} F_k$ está únicamente determinado en Ω . Una repetición sucesiva de este procedimiento muestra que $\partial_{\underline{x}} \cdot F_k$ también está únicamente determinado en Ω .

Finalmente, se obtiene el siguiente sistema de primer orden:

$$\begin{cases} (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)|_{\Omega} = P_{k+1}, \\ (\partial_{\underline{x}} \cdot F_k)|_{\Omega} = Q_{k-1}, \end{cases} \quad (3.50)$$

con P_{k+1} y Q_{k-1} siendo campos multivectoriales únicamente determinados en Ω . Como $(n \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0$, se implica que F_k es la única solución del sistema (3.46)-(3.47) y se concluye la demostración. $\square$

Aplicando el operador $\partial_{\underline{x}} \cdot$ por ambos lados de la primera ecuación en (3.43) y considerando la segunda condición aquí, se obtiene que ν es la solución única del siguiente problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson:

$$\begin{cases} (-\Delta\nu)|_{\Omega} = (-1)^{k+1} \partial_{\underline{x}} \cdot f_k, \\ \nu|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (3.51)$$

Por ende, debido al Teorema 8, si $k \neq m-1$ entonces ϑ será la única solución del sistema

$$\begin{cases} (\partial_{\underline{x}} \cdot \vartheta)|_{\Omega} = (-1)^k f_k + \partial_{\underline{x}} \wedge \nu, \\ (\partial_{\underline{x}} \wedge \vartheta)|_{\Omega} = 0, \\ (n \wedge \vartheta)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (3.52)$$

Para probar la unicidad del campo pseudoescalar ϑ cuando $k = m-1$, es necesario analizar el siguiente sistema

$$\begin{cases} (\partial_{\underline{x}} \vartheta)|_{\Omega} = (-1)^{m-1} f_{m-1} + \partial_{\underline{x}} \wedge \nu, \\ \int_{\Omega} \vartheta(\underline{x}) d\underline{x} = 0. \end{cases} \quad (3.53)$$

Asuma que el sistema (3.53) tiene dos soluciones pseudoescalares ϑ_1 y ϑ_2 . Por tanto, el campo pseudoescalar $\vartheta_1 - \vartheta_2$ será solución del sistema

$$\begin{cases} (\partial_{\underline{x}} \vartheta)|_{\Omega} = 0, \\ \int_{\Omega} \vartheta(\underline{x}) d\underline{x} = 0. \end{cases} \quad (3.54)$$

Por la primera condición en (3.54), se obtiene que $\vartheta|_{\Omega} = cte.$, pero entonces gracias a la condición integral se sigue que $\vartheta|_{\Omega} \equiv 0$, y por ende $\vartheta_1 = \vartheta_2$ en Ω .

Se puede expresar ν y ϑ como las imágenes de f_k mediante operadores integrales compactos, procediendo de manera análoga a como se hizo en la sección 3.1. La solución F_k del problema A2 puede ser obtenida por medio del procedimiento mostrado en la prueba del Teorema 21. Por consiguiente, F_k es expresado por medio de la composición de operadores integrales acotados y operadores integrales compactos, lo cual resulta en otro operador integral compacto.

Se aborda ahora el problema B2.

Teorema 22. *Sea $F_k(\underline{x})$ una solución del problema B2. Entonces*

$$\nu(\underline{x}) = \partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot)^{s-1} F_k(\underline{x})$$

y

$$\vartheta(\underline{x}) = \partial_{\underline{x}} \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge)^{s-1} F_k(\underline{x})$$

son solución de (3.43) en Ω , bajo las condiciones

$$\vartheta|_{\partial\Omega} = 0, \quad (n \cdot \nu)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.55)$$

y

$$\int_{\Omega} \nu(\underline{x}) d\underline{x} = 0. \quad (3.56)$$

Inversamente, si se asume que el par (ϑ, ν) en $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es solución de (3.43), satisfaciendo (3.55) o (3.55)-(3.56) cuando $k = 1$, entonces el campo k -vectorial $F_k \in C^{2s-1}(\Omega) \cap C^{2s-2}(\overline{\Omega})$, satisfaciendo (3.46) en Ω con

$$\begin{aligned} (n \cdot F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\ (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\ (n \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\ (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\ &\vdots \\ (n \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot)^{s-1} F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (3.57)$$

es la única solución del problema B2.

Demostración:

La prueba se lleva a cabo siguiendo las mismas pautas empleadas en la demostración del teorema anterior. De manera similar al problema A2 se puede demostrar la unicidad de la solución. $\square$

Análogamente al problema A2, la solución k -vectorial F_k del problema B2 puede ser dada en términos de un operador integral compacto sobre $L^p(\Omega)$, $p > 1$.

Observación 4. *Aplicando el Teorema 4, se obtiene que la solución del problema A2 cuando $s = 1$ puede ser expresada como*

$$\begin{aligned}
 F_k(\underline{x}) = & \int_{\partial\Omega} [F_k(\underline{y}) \cdot n(\underline{y})] \wedge E_0(\underline{y} - \underline{x}) d\underline{y} \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} E_0(\underline{y} - \underline{x}) \wedge [n(\underline{y}) \cdot (F_k(\underline{y}) \wedge \partial_{\underline{y}}) \cdot (\underline{y} - \underline{x})] d\underline{y} \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} E_0(\underline{y} - \underline{x}) \cdot [n(\underline{y}) \cdot (F_k(\underline{y}) \wedge \partial_{\underline{y}}) \wedge (\underline{y} - \underline{x})] d\underline{y} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m e_i \cdot \int_{\partial\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x}) n(\underline{y}) \cdot (F_k(\underline{y}) \wedge \partial_{\underline{y}}) d\underline{y} \wedge e_i \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m e_i \wedge \int_{\partial\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x}) n(\underline{y}) \cdot (F_k(\underline{y}) \wedge \partial_{\underline{y}}) d\underline{y} \cdot e_i \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} E_0(\underline{y} - \underline{x}) \wedge f_k(\underline{y}) \cdot (\underline{y} - \underline{x}) d\underline{y} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} E_0(\underline{y} - \underline{x}) \cdot f_k(\underline{y}) \wedge (\underline{y} - \underline{x}) d\underline{y} \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m e_i \wedge \int_{\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x}) f_k(\underline{y}) d\underline{y} \cdot e_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m e_i \cdot \int_{\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x}) f_k(\underline{y}) d\underline{y} \wedge e_i.
 \end{aligned}$$

Debido a la validez de los resultados, las condiciones

$$(\partial_{\underline{x}} F_k \partial_{\underline{x}})|_{\Omega} = f_k, \quad (n \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\partial_{\underline{x}} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.58)$$

conducen a la determinación sobre $\partial\Omega$ de los campos desconocidos $n \cdot F_k$ y $n \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)$. Este hecho motiva a que se pueda sustituir la tercera condición en (3.58) por la condición más débil $(n \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot F_k))|_{\partial\Omega} = 0$.

La primera condición en (3.44) del Lema 21 se reemplazará por $(n \wedge \nu)|_{\partial\Omega} = 0$, tal que el sistema

$$\begin{cases} \Delta \nu = (-1)^k \partial_{\underline{x}} \cdot f_k & \text{en } \Omega, \\ \nu = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

ahora tomará la forma

$$\begin{cases} -\partial_{\underline{x}} \cdot [\partial_{\underline{x}} \wedge \nu] = (-1)^k \partial_{\underline{x}} \cdot f_k & \text{en } \Omega, \\ n \wedge \nu = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.59)$$

Usando la Proposición 3, el Teorema 8 y asumiendo que $\nu \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces se tiene que $\partial_{\underline{x}} \wedge \nu$ está únicamente determinado en Ω . Como $(\partial_{\underline{x}} \cdot \nu)|_{\Omega} = 0$, entonces ν está también

únicamente determinado en Ω . Afirmaciones similares son válidas para el problema B2. En este caso particular, una condición más débil será

$$(n \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k))|_{\partial\Omega} = 0.$$

No obstante, para la unicidad de la solución es necesario asumir que $\vartheta \in C^1(\overline{\Omega})$ en el Teorema 22. Tales consideraciones también pueden ser hechas para los problemas A1 y B1.

Observación 5. Las siguientes condiciones de frontera del problema A2

$$(\partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}})^r F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad r = 0, \dots, s-1,$$

pueden sustituirse por las condiciones más débiles

$$(n \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}})^r F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad r = 0, \dots, s-1,$$

y los resultados siguen siendo válidos siempre que se suponga que $\nu \in C^1(\overline{\Omega})$ en la segunda parte del Teorema 21. La prueba es similar teniendo en cuenta el análisis de la observación anterior. El sistema (3.49) toma la forma

$$\begin{cases} \partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge [\partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}})^{s-2} F_k(\underline{x})] = \nu & \text{en } \Omega, \\ n \wedge \partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}})^{s-2} F_k(\underline{x}) = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.60)$$

Gracias a la Proposición 3 se tiene que $(n \wedge (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}})^{s-1} F_k)|_{\partial\Omega} = 0$, por ende, el campo k -vectorial $(\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}})^{s-1} F_k(\underline{x})$ está únicamente determinado en Ω debido al Teorema 8. Es claro que $\partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge \partial_{\underline{x}})^{s-2} F_k(\underline{x})$ también lo está en este dominio. El resto de la prueba se ejecuta como antes.

Para el problema B2, las condiciones de frontera

$$(\partial_{\underline{x}} \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}})^r F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad r = 0, \dots, s-1,$$

pueden ser reemplazadas por las condiciones más débiles

$$(n \cdot \partial_{\underline{x}} \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}})^r F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad r = 0, \dots, s-1,$$

y los mismos resultados siguen siendo válidos, siempre que $\vartheta \in C^1(\overline{\Omega})$ en la segunda parte del Teorema 22.

Conclusiones

Al concluir la presente investigación, puede afirmarse que se da respuesta al problema científico planteado y que se cumplen el objetivo general y las tareas de investigación propuestas. En síntesis, a continuación se exponen los principales resultados obtenidos:

- Se obtuvieron descomposiciones de Fischer para el espacio de polinomios de $\mathbb{R}^m$ en términos de funciones (φ, ψ) -inframonogénicas, (Φ, Ψ) -infrapolimonogénicas y (φ, ψ) -armónicas. Dichas descomposiciones fueron extendidas al Cálculo Fraccionario.
- En general, los polinomios obtenidos en las descomposiciones de Fischer no son mutuamente ortogonales. No obstante, una caracterización para la ortogonalidad de estos en la descomposición (φ, ψ) -inframonogénica fue establecida; mientras que la construcción de un ejemplo particular confirma que no es posible arribar a una caracterización para el caso (φ, ψ) -armónico.
- Se probó el buen planteamiento de los problemas A y B, se analizó el problema espectral y se mostró que las condiciones de frontera tratadas determinan que el operador sándwich sea autoadjunto.
- Se mostró que el buen planteamiento de los problemas A y B falla al considerar operadores de Dirac contruidos con conjuntos estructurales no equivalentes.
- Se reescribió el sistema de Lamé-Navier en términos de los módulos longitudinal y transversal, lo que permitió abordar problemas de frontera análogos a A y B.
- Se generalizaron los problemas A y B para el caso de operadores de Dirac de orden superior y se demostró también su buen planteamiento.

Recomendaciones

Como trabajo futuro se proponen las siguientes recomendaciones:

- Obtener descomposiciones fraccionarias de Fischer mediante otras clases funcionales que surgen en el contexto del Análisis de Clifford, como son las funciones (α, β) -monogénicas y las metamonogénicas.
- Existen fundamentos para conjeturar que cuando la dimensión m es impar y si se consideran dominios particulares como la bola, el sistema (3.25) sí se comporta bien planteado, pero esta conjetura continúa sin ser resuelta y constituye un problema de interés aún abierto.
- Abordar los problemas A y B reemplazando la segunda condición por la siguiente:

$$[\alpha n \cdot (\partial_{\underline{x}} \wedge F_k) + \beta n \wedge (\partial_{\underline{x}} \cdot F_k)]|_{\partial\Omega} = 0,$$

donde α y β son constantes reales no nulas.

Bibliografía

- [1] R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, A. Guzmán Adán, and U. Kähler. On the Π -operator in Clifford analysis. *J. Math. Anal. Appl.*, 434:1138–1159, 2016. 3
- [2] R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, A. Moreno García, and T. Moreno García. A Cauchy integral formula for infrapolymonogenic functions in Clifford analysis. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 30 (2):1–20, 2020. 13, 15
- [3] R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, T. Moreno García, and D. Alfonso Santiesteban. Reconstrucción de campos multivectoriales a partir del análisis de Clifford. *Rev. Acad. Colomb. Cienc. Exactas Fis. Nat.*, 48 (188):671–686, 2024. 7
- [4] C. Alfes and T. Creutzig. The mock modular data of a family of superalgebras. *Proc. Am. Math. Soc.*, 142:2265–2280, 2014. 36
- [5] D. Alfonso Santiesteban. On the Dirichlet problem for generalized Lamé-Navier systems in Clifford analysis. *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 30 (102):1–22, 2024. 4, 26
- [6] D. Alfonso Santiesteban. $\bar{\partial}$ -problem for a second order elliptic system in Clifford analysis. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 47:9718–9728, 2024. 3, 26
- [7] D. Alfonso Santiesteban. Sobre algunos operadores lineales en análisis de Clifford. *Rev. Mat. Teor. Apl.*, 31 (2):167–193, 2024. 26
- [8] D. Alfonso Santiesteban. Funciones Inframonogénicas Generalizadas en Análisis de Clifford. *Eco. Mat.*, 16(1):133–149, 2025. 7
- [9] D. Alfonso Santiesteban. A note on higher order Dirac operators in Clifford analysis. *Georgian Math. J.*, 32 (1):1–6, 2025. 3
- [10] D. Alfonso Santiesteban. *Fischer Decompositions in Clifford Analysis*, volume 1. Campana de Gauss Editores, 1 edition, 2026. 7
- [11] D. Alfonso Santiesteban and R. Abreu Blaya. Isomorphisms of Partial Differential Equations in Clifford Analysis. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 32 (10):1–18, 2022. 3, 26

- [12] D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya, and M. P. Árciga Alejandre. Buscando estructuras en las soluciones de un sistema generalizado de Lamé-Navier. *Publ. Investig.*, 17 (1):1–9, 2023. 26
- [13] D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya, and M.P. Árciga Alejandre. On a generalized Lamé-Navier system in $\mathbb{R}^3$. *Math. Slovaca*, 72(6):1527–1540, 2022. 4, 26
- [14] D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya, and M.P. Árciga Alejandre. On (ϕ, ψ) -inframongenic functions in Clifford analysis. *Bull. Braz. Math. Soc. New Series*, 53:605–621, 2022. 3, 25
- [15] D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya, Y. Peña Peña, and J. M. Sigarreta Almira. Descomposición de Fischer por funciones inframongénicas generalizadas. *Tlamati Sabid.*, 21:23–29, 2025. 7
- [16] D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya, Y. Peña Pérez, and J. M. Sigarreta Almira. Fractional Fischer decompositions by inframongenic functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 539:128468, 2024. 7
- [17] D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya, and J. Bory Reyes. Boundary value problems for a second-order elliptic partial differential equation system in Euclidean space. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 46:15784–15798, 2023. 7, 57, 59
- [18] D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya, and J. Bory Reyes. On Second Order Elliptic Systems of Partial Differential Equations in Clifford Analysis. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 35 (17):1–26, 2025. 3, 26
- [19] D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya, and J. Bory Reyes. On the well-posedness of boundary value problems for higher order Dirac operators in $\mathbb{R}^m$. *J. Differential Equations*, 416:1729–1746, 2025. 7
- [20] D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya, and J. Bory Reyes. Generalizaciones de las Funciones Inframongénicas en el Análisis de Clifford. *Digit. Cienc. UAQRO*, 19 (1):105–137, 2026. 7
- [21] D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya, J. L. Sánchez Santiesteban, and J. M. Sigarreta Almira. Descomposiciones aditivas del vector de desplazamiento del sistema de Lamé-Navier. *Rev. Acad. Colomb. Cienc. Exactas Fis. Nat.*, 49 (190):163–182, 2025. 4, 26
- [22] D. Alfonso Santiesteban, Y. Peña Pérez, and R. Abreu Blaya. Generalizations of harmonic functions in $\mathbb{R}^m$. *Anal. Math. Phys.*, 12 (10):1–12, 2022. 3, 26
- [23] D. Alfonso Santiesteban, D. E. Gutierrez Valencia, R. Abreu Blaya, and Y. Peña Pérez. Generalizaciones del operador de Lamé-Navier en análisis de Clifford. *Publ. Investig.*, 18 (1):1–12, 2024. 7, 26

- [24] C. Álvarez, J. Morais, and R. M. Porter. Reduced-quaternion inframonogenic functions on the ball. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 46 (18):18935–18951, 2023. 2
- [25] B. M. Balk. *On Polyanalytic Functions*. Akademie Verlag, 1991. 1
- [26] L. Beghin and M. Caputo. Commutative and associative properties of the Caputo fractional derivative and its generalizing convolution operator. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 89:105338, 2020. 35
- [27] H. Bhatia, V. Pascucci, and P. Bremer. The Helmholtz-Hodge decomposition—A survey. *IEEE Trans. Visualiz Comput. Grap*, 19 (8):1386–1404, 2013. 21
- [28] J. Bory Reyes and M. A. Pérez de la Rosa. Solutions of inhomogeneous generalized Moisil-Teodorescu systems in Euclidean space. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 29 (27):1–12, 2019. 21
- [29] J. Bory Reyes, H. De Schepper, A. Guzmán Adán, and F. Sommen. Higher order Borel-Pompeiu representations in Clifford analysis. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 36:4787–4796, 2016. 3
- [30] J. Bory Reyes, H. De Schepper, A. Guzmán Adán, and F. Sommen. On a mixed Fischer decomposition in Clifford analysis. *Complex Anal. Oper. Theory*, 11:359–374, 2017. 3
- [31] F. Brackx, R. Delanghe, and F. Sommen. Clifford analysis. *Pitman (Advanced Publishing Program)*, Boston, MA, 1982. 1, 11, 12
- [32] F. Brackx, H. De Schepper, R. Lávička, and V. Souček. Orthogonal basis of Hermitean monogenic polynomials: an explicit construction in complex dimension 2. In *Numerical Analysis and Applied Mathematics*. TE Simos, G Psihoyios, C Tsitouras (eds), Rhodes, Greece, 2010. 30
- [33] F. Brackx, H. De Schepper, R. Lávička, V. Souček, and W. Wang. Fischer Decomposition of Massless Fields for Spin $3/2$ in Dimension 4. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 32 (6):1–20, 2022. 30
- [34] F. Brackx, H. De Schepper, and V. Souček. Fischer decompositions in Euclidean and Hermitian Clifford analysis. *Arch. Math. (BRNO)*, 46:301–321, 2010. 30
- [35] T. Creutzig, S. Kanade, T. Liu, and D. Ridout. Cosets, characters and fusion for admissible-level $\mathfrak{osp}(1/2)$ minimal models. *Nucl. Phys. B*, 938:22–55, 2019. 36
- [36] R. Delanghe. On regular-analytic functions with values in a Clifford algebra. *Math. Ann.*, 185:91–111, 1970. 11
- [37] R. Delanghe. Clifford Analysis: History and Perspective. *Comput. Methods Funct. Theory*, 1(1):107–153, 2001. 11

- [38] R. Delanghe and J. Bory Reyes. An invitation to Clifford Analysis. *Cienc. Mat.*, 21(2):109–137, 2003. 11
- [39] R. Delanghe, F. Sommen, and V. Souček. *Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions, Mathematics and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992. 11, 30, 32
- [40] B. B. Delgado and J. E. Macías Díaz. An exterior Neumann boundary-value problem for the Div-Curl system and applications. *Mathematics*, 9:1609, 2021. 21
- [41] F. M. Denaro. On the application of the Helmholtz-Hodge decomposition in projection methods for incompressible flows with general boundary conditions. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 43:43–69, 2003. 21
- [42] D.C. Dinh. On structure of inframonogenic functions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 31(50), 2021. 2
- [43] A. Dzhravaev. *Methods of singular integral equations*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 60, 1992. 5, 47, 52
- [44] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010. 1, 21
- [45] E. Fischer. Über die Differentiationsprozesse der Algebra. *J. für Math.*, 148:1–78, 1917. 2, 30
- [46] L. Frappat, A. Sciarrino, and P. Sorba. *Dictionary on Lie Algebras and Superalgebras*. Academic Press, 2000. 36
- [47] I. Fredholm. Sur une classe d'equations fonctionnelles. *Acta Math.*, 27:365–390, 1903. 52
- [48] L. Gao, X. j. Du, and Y. h. Xie. A Cauchy integral formula for (p, q) -monogenic functions with α -weight. *Appl. Math. J. Chin. Univ.*, 39:545–553, 2024. 2
- [49] A. Moreno García, T. Moreno García, and R. Abreu Blaya. Comparing harmonic and inframonogenic functions in Clifford analysis. *Mediterr. J. Math.*, 19 (1):33, 2022. 2, 26
- [50] A. Moreno García, T. Moreno García, R. Abreu Blaya, and J. Bory Reyes. Cauchy integral formula for inframonogenic functions in Clifford analysis. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 27 (2):1147–1159, 2017. 2, 15, 26
- [51] A. Moreno García, T. Moreno García, R. Abreu Blaya, and J. Bory Reyes. Inframonogenic functions and their applications in three dimensional elasticity theory. *Math. Meth. Appl Sci.*, 41(10):3622–3631, 2018. 2, 26, 56

- [52] A. Moreno García, D. Alfonso Santiesteban, and R. Abreu Blaya. On the Dirichlet problem for second order elliptic systems in the ball. *J. Differential Equations*, 364:498–520, 2023. 2, 26, 27
- [53] J. W. Gibbs and E. B. Wilson. *Vector analysis*. Yale University Press Ninth Printing, New Haven, 1947. 21
- [54] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 1998. 1, 21
- [55] K. Gürlebeck, K. Habetha, and W. Sprößig. *Holomorphic Functions in the Plane and n -Dimensional Space*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. 1, 9, 11, 14, 17, 18
- [56] K. Gürlebeck, K. Habetha, and W. Sprößig. *Application of Holomorphic Functions in Two and Higher Dimensions*. Birkhäuser, 2016. 1, 21, 51
- [57] K. Gürlebeck and H.M. Nguyen. On ψ -hyperholomorphic functions and a decomposition of harmonics. *Hyper complex Analysis: New Perspectives and Applications. Trends in Mathematics*, pages 181–189, 2014. 3, 24
- [58] K. Gürlebeck and H.M. Nguyen. ψ -Hyperholomorphic functions and an application to elasticity problems. *AIP Conference Proceedings*, 1648(1):440005, 2015. 3, 24
- [59] K. Gürlebeck and W. Sprößig. *Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems*. Birkhäuser AG, Basel, 1990. 1, 11
- [60] K. Gürlebeck and W. Sprößig. *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers. Wiley and Sons Publ.*, 1997. 11
- [61] A. Hegazi and M. Mansour. Quantum Group Structure of Lie Superalgebra $\mathfrak{osp}(1/2)$. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:2695–2701, 1999. 36
- [62] H. Helmholtz. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welcher der Wirbelbewegungen entsprechen. *J. Reine Angew. Math.*, 55:25–55, 1858. 19, 21
- [63] V. Iftimie. Fonctions hypercomplexes. *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. Roumanie*, 9:279–332, 1965. 1
- [64] U. Kähler and N. Vieira. Fractional Clifford analysis. In *Hypercomplex Analysis: New Perspectives and Applications*. Trends in Mathematics, Springer International Publishing, Switzerland, 2014. 4, 34, 35, 39
- [65] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies, 2006. 35

- [66] G. R. Kirchhoff. *Vorlesungen über mathematische Physik*. 4th ed., Mechanik, vol. 1, Leipzig, 1897, 1st ed., 1876. 55
- [67] V.S. Kiryakova. *Generalized Fractional Calculus and Applications*. Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 301, Longman Scientific & Technical/John Wiley & Sons, Harlow/New York, 1994. 35
- [68] R.S. Krausshar and H. Malonek. A characterization of conformal mappings in $\mathbb{R}^4$ by a formal differentiability condition. *Bull. Soc. R. Sci. Liege*, 70(1):35–49, 2001. 3
- [69] V. V. Kravchenko. *Applied Quaternionic Analysis*. Heldermann Verlag, Berlin, 2003. 1
- [70] G. Lamé. Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température. *J. Math. Pures Appl.*, 2:147–188, 1837. 55
- [71] R. Lávička. The Fischer decomposition for the h-action and its applications. *Hypercomplex analysis and applications trends in mathematics. Edited by Sabadini and F. Sommen*, I, 2011. 2, 4
- [72] H. Malonek, D. Peña Peña, and F. Sommen. Fischer decomposition by inframonogenic functions. *CUBO A. Math. J.*, 12(2):189–197, 2010. 1, 2, 4, 26, 31, 32
- [73] H. Malonek, D. Peña Peña, and F. Sommen. A Cauchy-Kowalevski theorem for inframonogenic functions. *Math. J. Okayama Univ.*, 53:167–172, 2011. 2
- [74] N.I. Muskhelishvili. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Groningen, The Netherland: Noordhoff, 1953. 1
- [75] H. M. Nguyen. Ψ -Hyperholomorphic function theory in $\mathbb{R}^3$: Geometric Mapping Properties and Applications. PhD thesis, Fakultät Bauingenieurwesen der Bauhaus-Universität, 2015. 24
- [76] K. Nôno. On the quaternion linearization of Laplacian δ . *Bull. Fukuoka Univ.*, III(35):5–10, 1986. 2
- [77] K. Nôno and Y. Inenaga. On the Clifford linearization of Laplacian. *J. Indian Inst. Sci.*, 67(5-6):203–208, 1987. 2
- [78] F. Reséndis and M. Shapiro. Recent advances in hypercomplex analysis. *Carta Informativa, Soc. Mat. Mex. Marzo*, pages 11–14, 2002. 11
- [79] J. Ryan. Cauchy-Green type formulae in Clifford analysis. *Trans. Am. Math. Soc.*, 347 (4):1331–1341, 1995. 13, 15
- [80] J. Ryan. Basic Clifford analysis. *Cubo Mat. Educ.*, 2:226–256, 2000. 11

- [81] J. Ryan. Introductory Clifford analysis. In *Ablamowicz, Rafal and Sobczyk, Garret (Eds.) Lectures on Clifford (geometric) algebras and applications*. Boston, MA: Birkhäuser, 2004. 11, 15
- [82] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987. 35
- [83] J. L. Serrano Ricardo, R. Abreu Blaya, and J. Sánchez Ortiz. On a Riemann-Hilbert problem for Ψ -hyperholomorphic functions in $\mathbb{R}^m$. *Anal. Math. Phys.*, 13 (84):1–20, 2023. 3, 26
- [84] J. L. Serrano Ricardo, J. Bory Reyes, and R. Abreu Blaya. Singular integral operators and a $\bar{\partial}$ -problem for (φ, ψ) -harmonic functions. *Anal. Math. Phys.*, 11 (155):1–25, 2021. 26, 27
- [85] J.L. Serrano Ricardo, R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, and J. Sánchez Ortiz. On a Riemann-Hilbert boundary value problem for (φ, ψ) -harmonic functions in $\mathbb{R}^m$. *Georgian Math. J.*, 29 (3):445–454, 2022. 26
- [86] M. V. Shapiro. On some boundary value problems for functions with values in Clifford algebra. *Matem. Vesnik.*, 40:321–326, 1988. 2
- [87] M. V. Shapiro. Quaternionic Analysis and Some Conventional Theories. In D. Alpay, editor, *Operator Theory*, pages 1423–1446. Springer, Basel, 2015. 3
- [88] M. V. Shapiro and N. L. Vasilevski. Quaternionic ψ -hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems. *Complex Var.*, 27:17–46, 1995. 3
- [89] F. Sommen and W. Sprößig. Introduction to Clifford analysis. *Math. Methods Appl. Sci.*, 25(6):1337–1342, 2002. 11
- [90] V. Souček, R. Delanghe, and R. Lávička. The Fischer decomposition for Hodge-de Rham systems in Euclidean spaces. *Math. Meth. Appl Sci.*, 35:10–16, 2012. 30
- [91] I. N. Vekua. *Generalized Analytic Functions*. Pergamon Press, London, Addison-Wesley, Massachusetts, 1962. 1
- [92] L. Wang, S. Jia, L. Luo, and F. Qiu. Plemelj formula of inframonogenic functions and their boundary value problems. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2002. 2